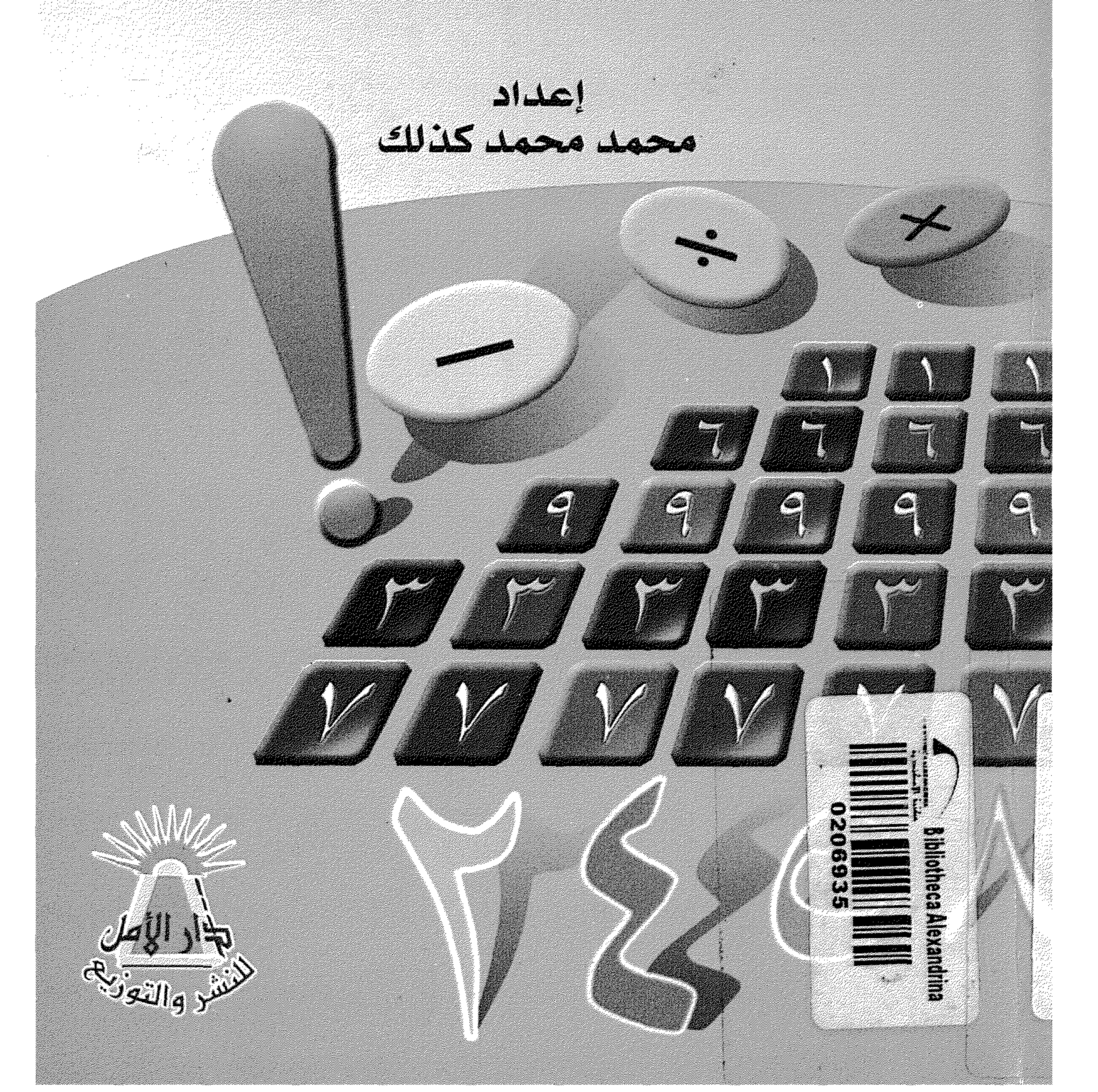
طرائف الرياضيات

إعداد
محمد محمد كذلك



دار الأمل للنشر والتوزيع

طرائف الرياضيات

طرائف الرياضيات



إعداد
محمد محمد كذلك

دار الأمـــــل
للنشر والتوزيع
العنوان : ٨ شارع عبد العزيز حامد ـ أول الملك فيصل ـ جيزة .. ت: ٥٨٦٠٨٩٢

المحتويات

الموضوع **الصفحة**

مقدمة

تعتبر الرياضيات بكل فروعها النظرية والتطبيقية من العلوم التى تتمتع بقدر كبير من الصعوبة والتعقيد بدرجة تجعلها غير محببة للنفس، ودائمًا يسعى الجميع إلى الابتعاد عنها، حيث لا تلقى هوى فى نفس الإنسان، إلا أن هناك فرعاً (إذا جاز التعبير) من الرياضيات إذ صادف الإنسان بعضاً من معضلاته جعلته يشحذ فكره دون ملل؛ للبحث عن حل لهذه المعضلات ألا وهى ما يطلق عليه اسم «الألغاز» ، والألغاز على اختلاف ألوانها وأشكالها تمثل الترفيه والتحدى لعقل وذكاء الإنسان، ومنها ما يمكن فك طلاسمه بقليل من الجهد، إلا أن العديد منها يحتاج إلى شحذ الهمم للوصول إلى حلول لها، حتى من جانب العديد من العلماء الذين استهواهم ذلك الفرع من الرياضيات بما فيه من تحدٍ للعقول، حتى زادت الألغاز عدداً، وارتفعت درجة صعوبتها ووصل الأمر إلى التحدى الحقيقى بين العلماء وهواة حل الألغاز.

وفى هذا الكتاب حاولت أن أسرد قدر المستطاع العديد من هذه المعضلات الرياضية اللغزية مع شرح كثير منها، من حيث طريقة عمل هذه الألغاز، والأسلوب العلمى الرياضى للوصول إلى الحل، كما أدرجت برنامجًا للحاسب الآلى لصنع أحد هذه الألغاز، ومنها ما يحتاج فى حله إلى مجرد التفكير، والعديد يحتاج إلى ورقة وقلم، والبعض يحتاج قطعًا من الخشب المصنوع أو الورق المقوى، أو غير ذلك ... إلا أنها جميعًا تشترك فى أنها تصل بالقارئ إلى درجة عالية من الإمتاع العقلى الدائم .

محمد كذلك

الأعداد المتناهية

فى الكبر

إلى أى مدى تستطيع أن تعد؟

يحكى أن أميرين عقدا رهانًا يفوز فيه من يتفوق على الآخر فى ذكر أكبر عدد ممكن. فقال أحدهما للآخر: ابدأ أنت بذكر عددك، فاستغرق صاحبه بضع دقائق فى تفكير عميق ثم ذكر اكبر عدد توصل إليه وقال: ثلاثة .

وجاء دور الآخر فى إعمال فكره وذكر عدد أكبر من ذلك، واستغرق حوالى ربع ساعة فى التفكير وقال بعدها: لقد فزت .

وبالطبع كان هذان الأميران من «المجر»، إلا أن أغلب الظن أن هذه القصة ليست إلا دسيسة خبيثة، فمثل هذه المحادثة لا تقع بين رجلين من المجر بل بين قبائل الهوتنتوت. فحسب وتأمل ما ذكره بعض الرحالة أنه لا توجد فى مفردات لغات كثيرة من تلك القبائل أسماء أعداد تزيد عن ثلاثة. فلو سألت أحد أفراد هذه القبائل كم له من الأولاد وكان العدد يزيد عن ثلاثة لقال لك «كثيرون» .

وفى عصرنا أصبحنا نكتب أى عدد نشاء بمجرد وضع عدد من الأصفار على يمينه حتى أنك تستطيع أن تكتب أى عدد يزيد حتى عن عدد ذرات الكون، وقد ذكر (أرشميدس) فى كتابه «حساب الرمال» يقول «يظن بعض الناس أن عدد حبات الرمال لا نهائى المقدار، ولا أقصد بالرمال تلك التى بسراقسطة وباقى جزر صقلية فحسب، بل كل ما فى سائر بقاع الأرض المأهولة منها وغير المأهولة، وهناك البعض، مع أنهم لا يقولون بلا نهائية العدد ، إلا أنهم يعتقدون أنه لا يمكن

ذكر عدد يكون من الكبر بحيث يزيد عن العدد الدال على عدد حبات رمال الأرض، ولو أن هؤلاء تصوروا كتلة رملية فى مثل حجم الأرض بما فيها من بحار تملئ بالرمال حتى تتساوى مع أعلى الجبال لكانوا أشد وثوقا من أنه لا يمكن إيجاد اسم لعدد يزيد عن عدد حبات الرمال التى احتوتها تلك الكتلة، إلا أنه من الثابت أن فى الإمكان ذكر عدد يزيد عن عدد حبات الرمال فى كتلة تعادل حجم الكون كله لا حجم الأرض، ومن ضحايا الأعداد المتناهية فى الكبر الملك «شرهام» ملك الهند، فقد أراد ـ كما تروى أسطورة قديمة ـ أن يكافئ وزيره «سيسابن ظاهر» لاختراعه لعبة الشطرنج وإهدائها له. فسأل الوزير أن يطلب منه ما يشاء، وكان الوزير غاية فى التواضع والقناعة، فركع أمام الملك وقال «مُر لى يا مولاى بحبة قمح توضع فى المربع الأول من رقعة الشطرنج وحبتين فى المربع الثانى أو أربع حبات فى المربع الثالث و ٨ حبات فى المربع الرابع وهكذا يضاعف العدد لكل مربع تال، فأمر لى يا مولاى بحبات من القمح تكفى لتغطية مربعات رقعة الشطرنج والتى عددها ٦٤ مربعًا» .

فقال الملك، وهو يخفى سروره؛ لأن ماعرضه من منحة شخصية على مخترع هذه اللعبة المعجزة لن يكلف خزائنه الكثير،: «لقد أوتيت سؤلك يا عبدى المخلص فإنك لا تطلب الكثير» ثم أمر بإحضار « زكيبة» من القمح. ولكن عندما أخذ فى عد حبات القمح واحدة للمربع الأول و٢ للثانى و٤ للثالث، ٨ للرابع.. وهكذا نفدت الزكيبة قبل عد ما يكفى للمربع رقم ٢٠، فأحضرت «زكائب» أخرى أمام الملك ولكن تزايدت حبات القمح اللازمة للمربعات التالية بسرعة كبيرة بحيث أصبح من الواضح أن الملك لا يستطيع أن يفى بوعده لوزيره حتى

لو جمع لهذا الغرض جميع محصول الهند من القمح. إذ كان يحتاج، ليفى بوعده إلى عـدد من حبـات القمح يسـاوى ١٨,٤٤٦,٧٤٤,٠٧٣,٧٠٩,٥٥١,٦١٥ حبة .

وللوصول إلى معرفة هذا الرقم نقول: إن عدد حبات القمح التى طلبها الوزير المتواضع تساوى :

$$١+٢+٢^{٢}+٢^{٣}+ .... + ٢^{٦٢} + ٢^{٦٣}$$

وهذه تعتـبر متواليـة هندسية حـدها الأول ١ وأساسها ٢ وعـدد حدودها ٦٤ (هو مربعات الرقعة) وبتطبيق قانون جمع المتوالية الهندسية ينتج مجموع يساوى $\frac{٢^{٦٤} - ١}{٢ - ١} = ٢^{٦٤} - ١$ وبمضاعفة (٢) أربعًا وستين مرة، وطرح الواحد ينتج العدد السابق ذكره .

وهذا العدد ليس فى كبر عدد ذرات الكون ولكنه كبير على كل حال، ولو أننا حسـبنا عدد حـبات القـمح فى العام لوجـدنا أن حبات القـمح التى طلبـها الوزير تعـادل مـحـصـول العـالم كله لمـدة ٢٠٠٠ سنة فـى ذلك الوقت ، وهكذا وجـد (شرهـام) الملك نفسـه غارقـاً فى الدين لوزيره ، وكان عليـه أن يواجه طلبـاته أو يضرب عنقه، وأغلب الظن أنه ضرب عنقه .

وتلعب الأعـداد المتناهيـة فى الكبر الدور الرئيـسى فى قصـة هندسيـة أخرى تتعلق بمـشكلة «نهاية العـالم» وها هى القصة كـما يرويهـا «بول» مؤرخ الطرائف الرياضية :

فعلى أرض معبد بنارس الكبير، وتحت الـقبة التى تحدد مركز العالم، ترتكز

لوحة نحاسية ثبتت فيها ثلاثة أسلاك من الماس طول كل منها ذراع وسمكه سمك جسد النحلة .

وعند بدء الخليقة، وضع الخالق فى أحد هذه الأسلاك ٦٤ قرصًا من الذهب الخالص. وقد وضعت بحيث كان أكبرها يرتكز على اللوحة النحاسية وتعلوه الأقراص الأخرى الأصغر فالأصغر حتى تنتهى بأصغرها جميعاً. ويسمى هذا السلك بما فيه من أقراص باسم «برج براهما»، ويقوم الكاهن الذى عليه النوبة ، ليلاً ونهارًا بلا انقطاع ، بنقل الأقراص إلى سلك ماس آخر متبعًا قوانين (براهما) التى لا تبديل فيها ولا تعديل .

وتقضى هذه القوانين أن الكاهن يجب ألا ينقل فى المرة الواحدة إلا قرصًا واحدًا كما يجب ألا يضع قرصًا فوق آخر أصغر منه. وعندما يتم نقل الأقراص الـ٦٤ من السلك الذى وضعها الخالق فيه عند بدء الخليقة إلى أحد السلكين الآخرين فإن البرج والمعبد والبرهمانيين جميعًا سوف يموتون ويتحللون إلى تراب .

ثم يدوى صوت كصوت الرعد ويتلاشى العالم .

وليس من الصعب اكتشاف القاعدة العامة التى يجب أن تتبع لنقل الأقراص وستجد عند اكتشافها أن عدد نقلات كل قرص ضعف عدد نقلات القرص السابق له، فالقرص الأول تلزمه نقلة واحدة ولكن عدد النقلات اللازمة لكل قرص تال يتزايد هندسيًا .

وبذلك عندما يتم نقل القرص الرابع والستين يكون عدد عمليات نقل الأقراص كلها قد بلغ نفس عدد حبات القمح التى طلبها مخترع الشطرنج .

وسوف نفـرض أن الكهنة يعملون ليـلاً ونهاراً بلا راحـة أو إجازة، وأن النقلة الواحـدة تسـتـغـرق ثانيـة واحدة، وحـيث أن العـام يحـتـوى على مـا يقـرب من ٣١,٥٥٨,٠٠٠ ثانية فإن هذه العملية سوف تـستغرق ما يزيد عن ٥٨ ألف بليون سنة. فهل ستصدِّق هذه الأسطورة ؟!

❑❑❑

عجائب الأرقام

المربعات السحرية:

تعد المربعات السحرية واحدة من أقدم غرائب وعجائب الأرقام، وأكثرها إثارة للدهشة، ويتكون المربع السحرى من مجموعة من الأرقام مرتبة فى صورة مربع بحيث يكون مجموع أرقام كل صف مساوياً لمجموع أرقام كل عمود، ومساوياً لمجموع أرقام كل من قطرى المربع الرئيسيين .

وفى المربع السحرى بالجدول التالى نجد أن مجموع أرقام كل صف هو ١٥ وأن مجموع أرقام كل عمود هو ١٥ وكذلك الحال بالنسبة لمجموع أرقام كل من قطرى المربع . ويطلق على الرقم ١٥ فى هذه الحالة اسم الرقم السحرى .

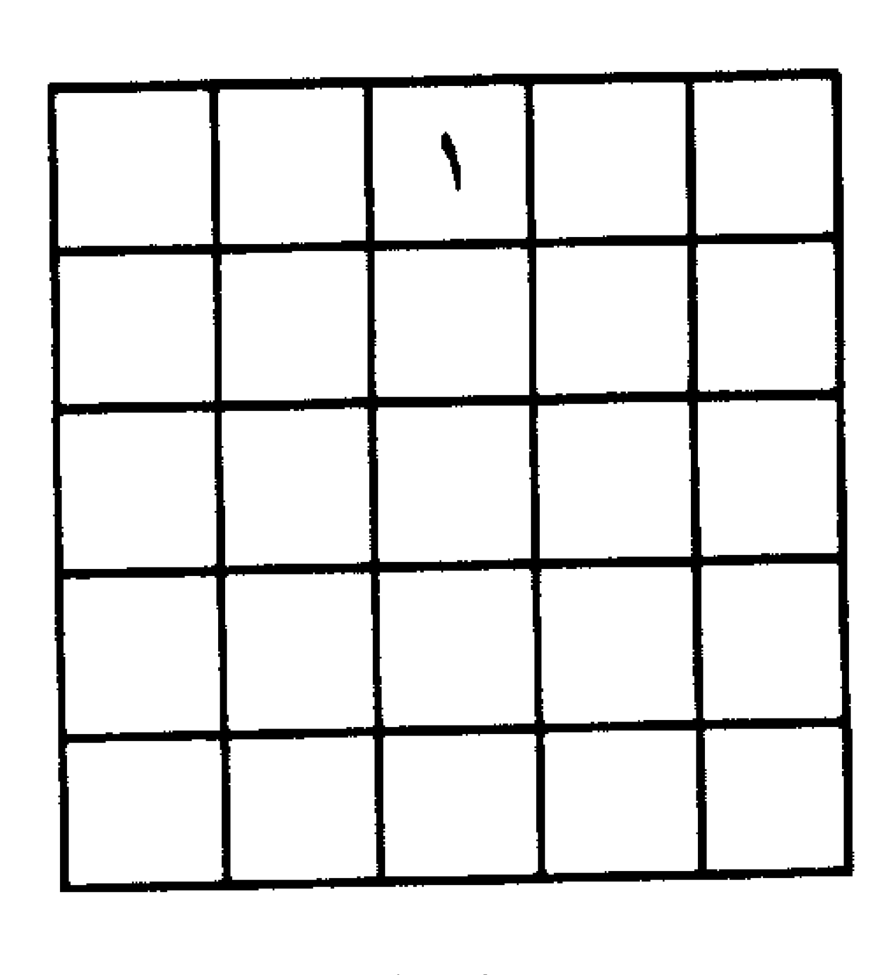
٨	١	٦
٣	٥	٧
٤	٩	٢

المربعات السحرية ذات الدرجة الفردية

سوف نشرح فيما يلى طريقة تكوين مربع سحرى من الدرجة الخامسة، ويمكن تطبيق ذلك على مربع من الدرجة الثالثة، السابعة، التاسعة ... بشرط أن يكون عدد مربعات الصف أو العمود عدد فردى متساوى كأن يكون عدد مربعات الصف خمسة وعدد مربعات العمود خمسة .

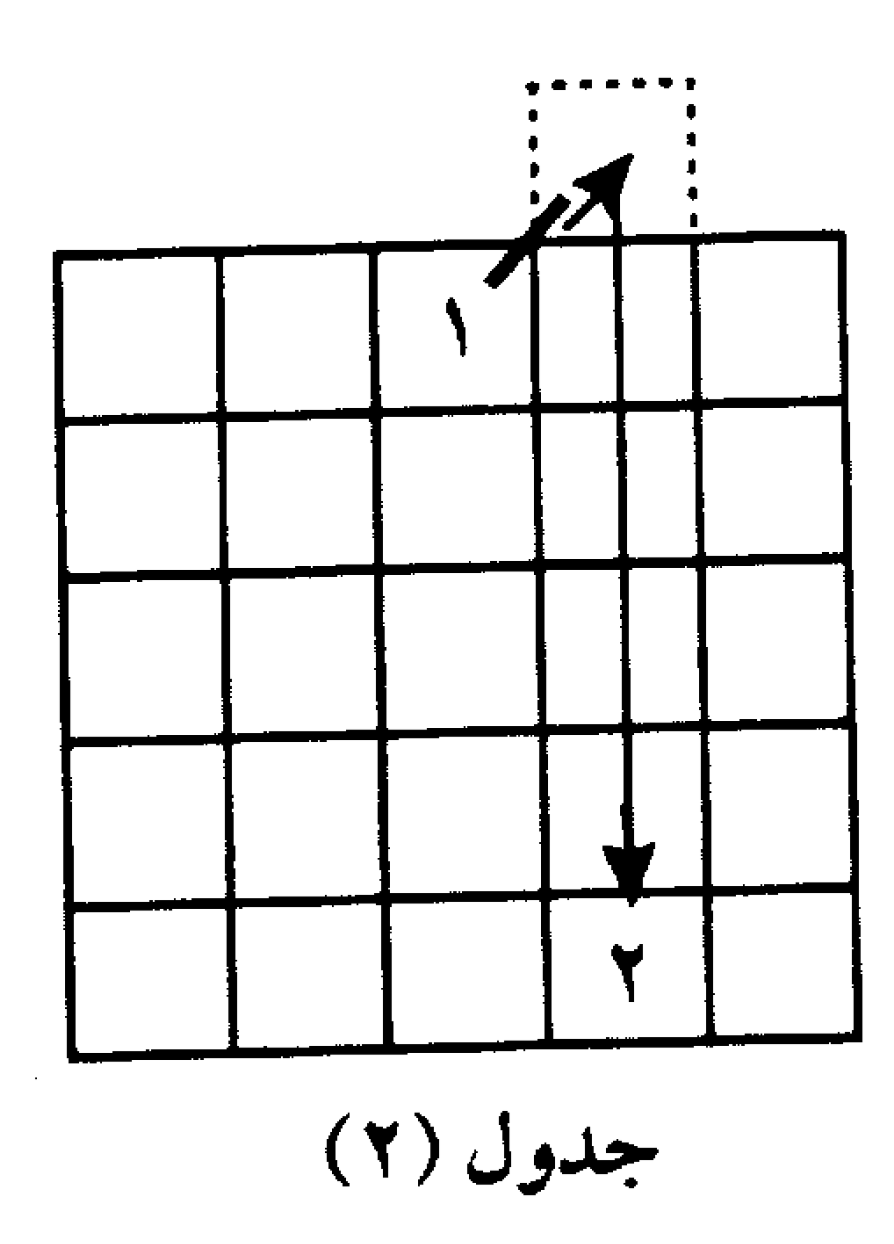
الخطوات:

١ ـ ضع الرقم (١) فى الخلية الوسطى من الصف الأول . (جدول ١)



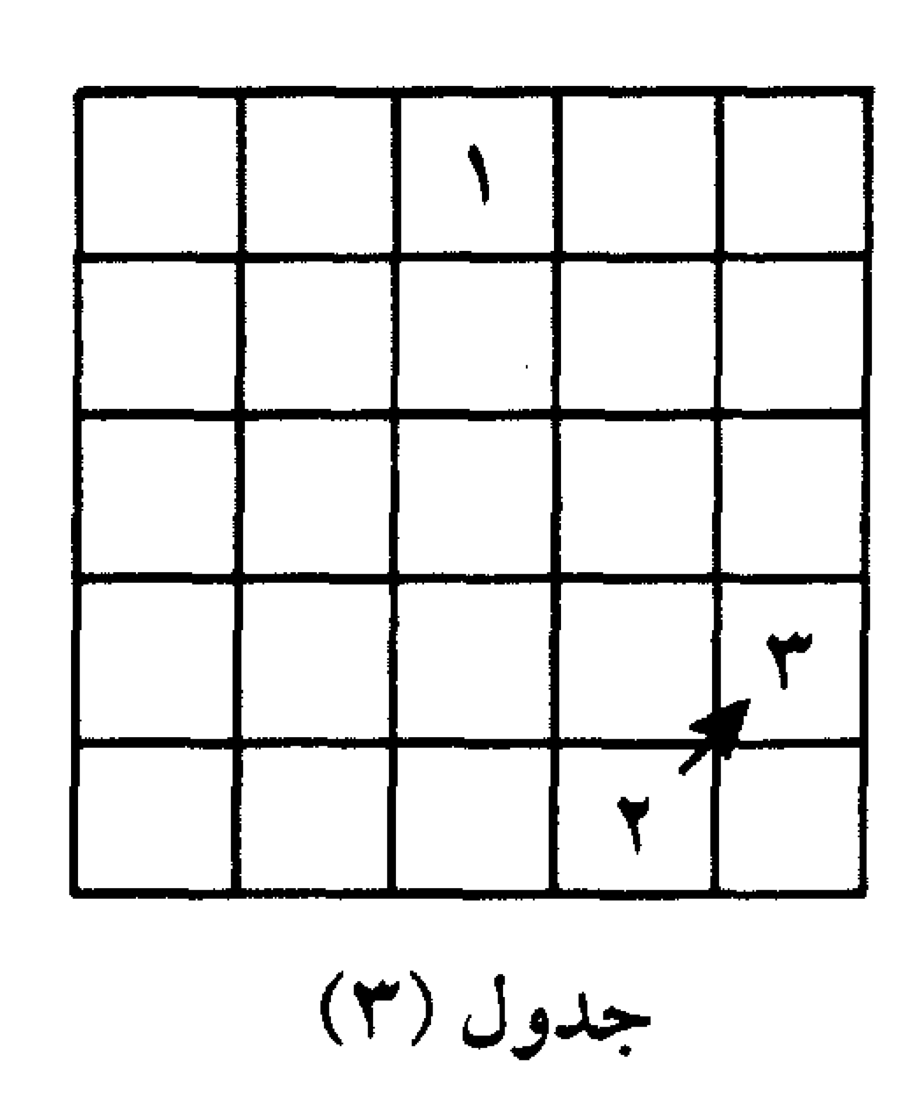
جدول (١)

٢ ـ تحرك إلى المربع القائم إلى يمين المربع أعلى الرقم (١)، ولكن هذا المربع سوف يقع خارج المربع السحرى لذلك نضع الرقم (٢) فى المربع الذى يقع أسفل العمود الذى كان يجب أن نضع فيه هذا الرقم (جدول ٢)



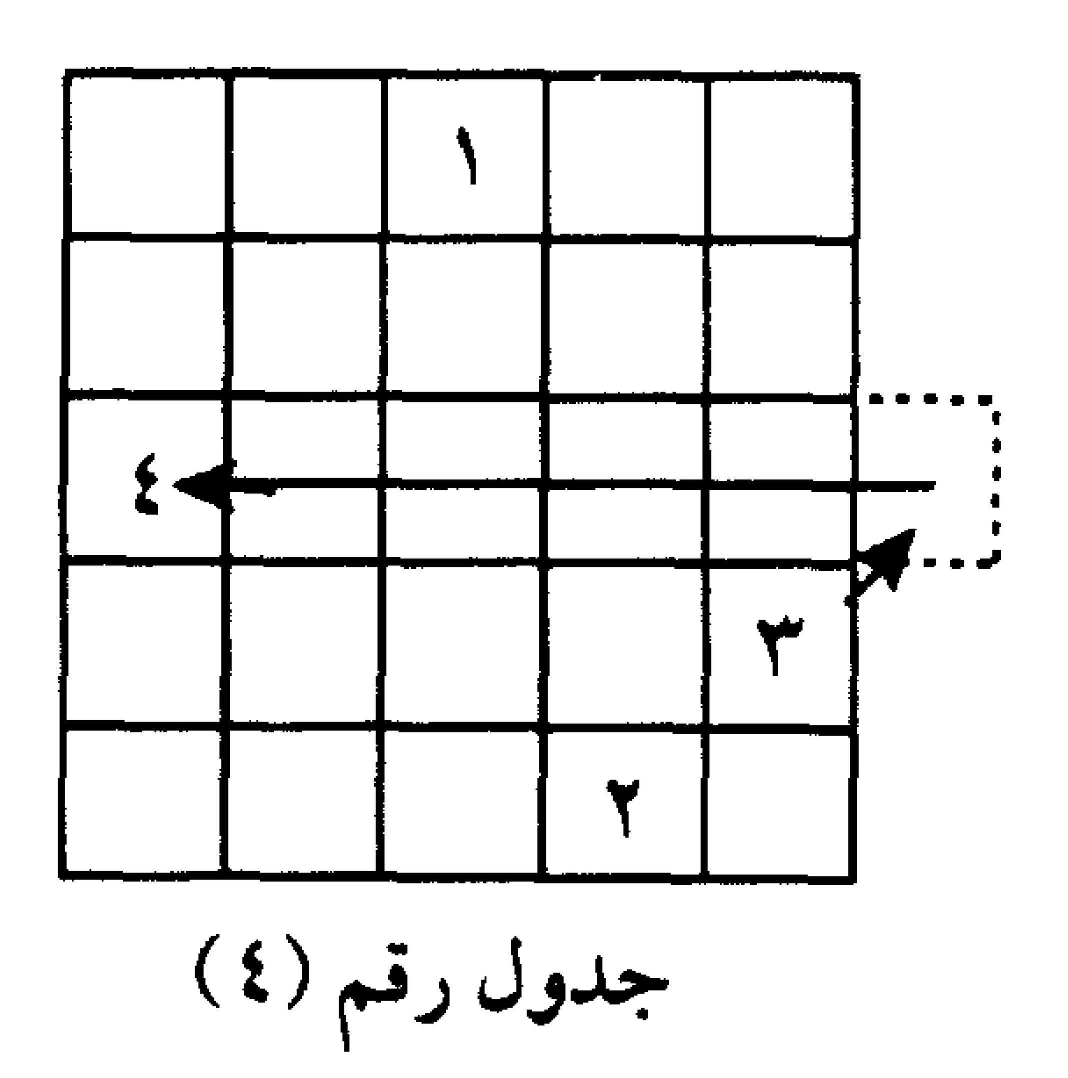
جدول (٢)

٣ ـ انتقل إلى المربع الذى إلى يمين المربع الأعلى رقم (٢) وضع فيه الرقم (٣) كما فى جدول ٣.



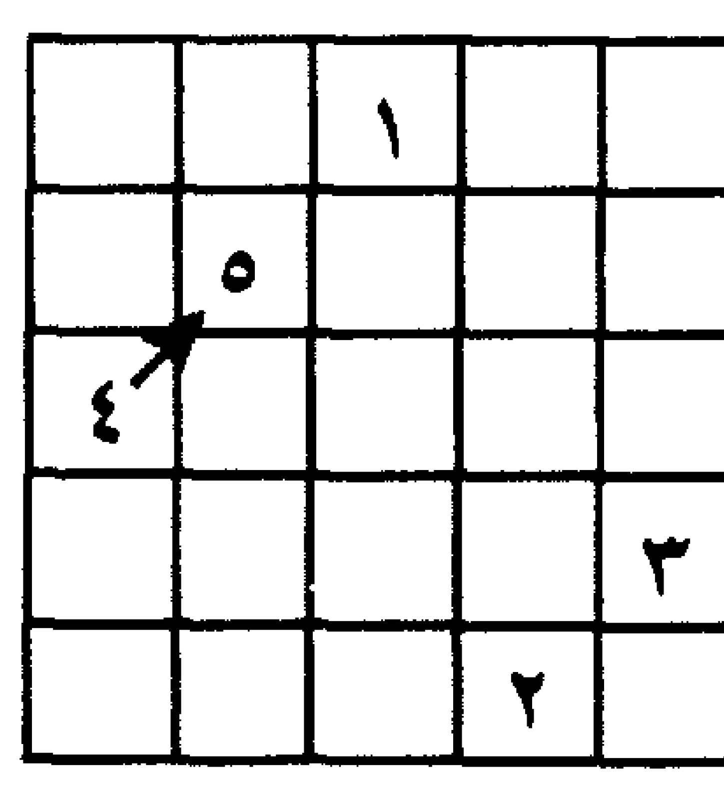
جدول (٣)

٤ـ إذا انتقلت إلى المربع الذى يقع إلى يمين المربع أعلى رقم (٣) سوف تجد نفسك خارج المربع السحرى وفى هذه الحالة نضع الرقم «٤» فى أول مربع إلى يسار نفس الصف . كما فى جدول ٤ .



جدول رقم (٤)

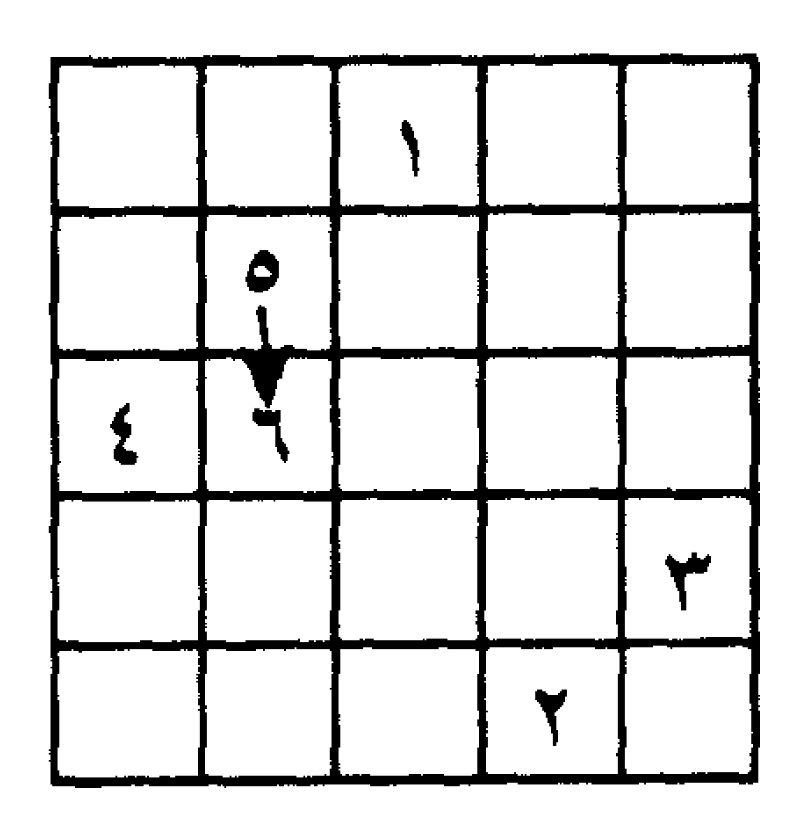
٥ـ ثم نضع الرقم «٥» فى المربع الذى يقع إلى يمين المربع أعلى الرقم «٤»، كما فى جدول رقم «٥» .



جدول رقم (٥)

وبهذا نكون قد أكملنا مجموعة من خمسة أرقام .

٦ـ ولما كـان هذا المربع السحـرى من الدرجة الخـامسة (يحـتوى كل ضلع على ٥ خلايا) فإنه يجب عليك أن تتنقل إلى المربع أسفل ذلك الذى يحتوى على رقم (٥) لتضع فيه الرقـم (٦) ولتبـدأ مجموعـة الأرقام الخمسة التـالية ، جدول رقم (٦).



		١		
	٥			
٤	٦			
				٣
			٢	

جدول رقم (٦)

ملاحظة:

إذا كان المـربع السحرى من الدرجـة الثالثة فـإنه يجب أن تنتقل لأسـفل بعد ثلاثة أرقام ، وفى حالة مـربع سحرى من الدرجة السـابعة تنتقل لأسفل بعد سـبعة أرقام وهكذا .

٧ ـ انتقل إلى المـربع الذى يقع إلى يمين المـربع أعلى المربع الذى يحـتوى على رقم (٦) لتضع الرقم (٧) واستمر بنفس الطريقة مع الأرقام التالية. وبعد كل خمـسة أرقام انتقل مـربع إلى أسفل. وعندما تصـل إلى الرقم (٢٥) يكون المربع

السحرى قد اكتمل وأصبح كما فى الشكل التالى وأن مجموع كل صف أو كل عمود أو كل من قطرى المربع يساوى ٦٥. جدول رقم (٧) .

١٥	٨	١	٢٤	١٧
١٦	١٤	٧	٥	٢٣
٢٢	٢٠	١٣	٦	٤
٣	٢١	١٩	١٢	١٠
٩	٢	٢٥	١٨	١١

جدول رقم (٧)

وفيما يلى نذكر مربعاً سحرياً من الدرجة السابعة والثالثة حتى تتضح الفكرة جيداً .

٢٨	١٩	١٠	١	٤٨	٣٩	٣٠
٢٩	٢٧	١٨	٩	٧	٤٧	٣٨
٣٧	٣٥	٢٦	١٧	٨	٦	٤٦
٤٥	٣٦	٣٤	٢٥	١٦	١٤	٥
٤	٤٤	٤٢	٣٣	٢٤	١٥	١٣
١٢	٣	٤٣	٤١	٣٢	٢٣	٢١
٢٠	١١	٢	٤٩	٤٠	٣١	٢٢

مربع سحرى من الدرجة السابعة

٦	١	٨
٧	٥	٣
٢	٩	٤

مربع سحرى من الدرجة الثالثة

المربعات السحرية من الدرجة الزوجية الرابعة

يبين المثال التالى طريقة تكوين مربع سحرى من الدرجة الزوجية الرابعة .

الخطوات:

١ ـ ارسم مربعًا كبيرًا يقسم إلى ١٦ مربعًا صغيرًا ٤ × ٤ متساوية .

٢ ـ ضع علامة × فى مربعات القطرين الرئيسيين كما بالشكل .

×			×
	×	×	
	×	×	
×			×

٣ـ ابدأ بالمربع العلوى الأيسر، وتحرك إلى اليمين متبعاً القواعد التالية:

أ ـ إذا كان المربع يحتوى على العلامة × اتركه .

ب ـ إذا كان المربع لا يحتوى على العلامة × ضع فيه رقمًا .

جـ ـ ابدأ بالعدد (١) ثم أضف إليه واحدًا كلما تحركت حركة وكلما وصلت إلى نهاية صف، كرر نفس العملية فى السطر التالى كما بالشكل .

×	٢	٣	×
٥	×	×	٨
٩	×	×	١٢
×	١٤	١٥	×

املأ المربعات التى تحتوى على العلامة × :

	٢	٣	
٥			٨
٩			١٢
	١٤	١٥	

X			X
	X	X	
	X	X	
X			X

ابدأ بالمربع العلوى الأيسر واتّبع القواعد التالية :

١ ـ إذا كان المربع يحتوى على العلامة × ضع فيه رقمًا .

٢ ـ إذا كان المربع يحتوى على رقم اتركه .

٣ـ ابدأ بالعدد ١٦ وانقص واحـدًا كلما تحركت حركـة واحدة. وإذا وصلت إلى نهاية صف كرر نفس العملية فى الصف التالى كما بالشكل التالى .

١٦			١٣
	١١	١٠	
	٧	٦	
٤			١

وفيما يلى الشكل النهائى للمربع السحرى من الدرجة الرابعة الزوجية .

١٦	٢	٣	١٣
٥	١١	١٠	٨
٩	٧	٦	١٢
٤	١٤	١٥	١

كيف تحسب الرقم السحرى للمربع:

يقال إن المربع السحرى من الدرجة (ن) إذا كان عدد الخلايا فى كل ضلع من أضلاعه هو (ن)، وعلى ذلك يكون المربع السحرى من الدرجة (٣) تحتوى أضلاعه على ٣ خلايا وهكذا .

ويحسب الرقم السحرى (مجموع أرقام كل صف أو كل عمود أو كل قطر) بالطريقة التالية : إذا كان المربع السحرى يحتوى على الأرقام من ١ إلى $ن^{٢}$ ، فإن:

$$\text{الرقم السحرى} = \frac{\text{عدد الخلايا (مربع عدد الخلايا + ١)}}{٢}$$

فإذا رمزنا لعدد الخلايا بالرمز (ن) يكون الرقم السحرى $= \frac{ن\,(ن^{٢} + ١)}{٢}$

ومن ذلك يتضح أن المربع السحرى من الدرجة الثالثة رقمه السحرى هو :

$$\text{الرقم السحرى} = \frac{٣\,(٣^{٢} + ١)}{٢} = \frac{٣\,(٩ + ١)}{٢} = \frac{٣٠}{٢} = ١٥$$

والرقم السحرى لمربع من الدرجة الخامسة $= \frac{٥\,(٥^{٢} + ١)}{٢} = \frac{٥(٢٥ + ١)}{٢} = \frac{٥ \times ٢٦}{٢} = ٦٥$

ويسرى هذا القانون على أى مربع سحرى بشرط أن نبدأ بالرقم (١) كبداية.

أما إذا بدأنا برقم غير الواحد استخدمنا القانون التالى:

$$\text{الرقم السحرى} = \frac{ن^{٣} + ن}{٢} + ن\,(ب - ١)$$

حيث ب = الرقم الابتدائى ، ن = عدد خلايا ضلع المربع .

استخدام الكمبيوتر فى تكوين
مربع سحرى زوجى من الدرجة الرابعة

برنامج بلغة البيزيك لتكوين مربع زوجى من الدرجة الرابعة:

```
10 REM 4 By 4 Magie SQuare
20 DIM (10, 10)
30 LET N = 4
40 REM store zeros in array M
50 For I = 1 To N
60 For J = 1 To N
70 LET M (I,J) = 0
80 NEXT J
90 NEXT I
100 REM STore 999 in each cell of Diagonal 1
110 For I = 1 to N
120 LET j = 1
130 LET M (I,J) = 999
140 NEXT I
150 REM store 999 in each cell of Diagonal 2
160 For I =1 to N
170 1ET j = N
180 LET M ( I, j ) = 999
190 NEXT I
200 REM firsT pass throngh array
210 LET K = 1
220 For I =1 To N
230 For J =1 To N
240 If M (I,j) = 0 then 260
```

```
250 LET M ( I, j) = K
260 LET K=K+ 1
270 NEXT J
280 NEXT L
290 REM Second Pass Through array
300 LET K= N* N
210 For I = 1 To N
320 For J = 1 To N
330 If M (I,J)= 999 Then 350
340 LET M (t,j)=K
350 LET k=k +1
360 NEXT J
370 NEXT I
380 REM PrinT magic square
390 PRINT "4 By magic square'
400 PRINT
410 For I = 1 ToN
420 For J = 1 ToN
430 PRINT M (I,J)
440 NEXT J
450 PRINT
460 PRINT
470 PRINT
480 NEXTI
490 END
```

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

المربع السحرى الناتج من تشغيل البرنامج

المصفوفات السحرية

لقد جذبت المربعـات السحرية اهتمام علماء الرياضـة لأكثر من ٢٠٠٠عام، وفى أبسط صورة يكون المربع السحرى فيه مجموع أرقام كل صف أو كل عمود أو كل قطر متسـاويًا كما سـبق شرحه، وهناك مـربعات سحرية للطرح ومـربعات سحرية للضرب ومربعات سحرية للقسمة .

ويبين الشكل التـالى مربعًا سحريًا مـن نوع مختلف تمامًا، ويبـدو هذا المربع بلا نظام معين، كـما لو كانت الأرقام قـد وزعت على المربعات الصغـيرة توزيعًا عشوائيًا، غيـر أن لهذا المربع خاصية سحريـة تدهش معظم علماء الرياضة بنفس القدر الذى تدهش به رجل الشارع .

١٩	٨	١١	٢٥	٧
١٢	١	٤	١٨	صفر
١٦	٥	٨	٢٢	٤
٢١	١٠	١٣	٢٧	٩
١٤	٣	٦	٢٠	٢

ولبيان هذه الخاصيـة السحرية يلزمنا خمس عملات معدنية صـغيرة بالإضافة إلى ٢٠ مربعًا صغيرًا من الورق الأبيض كل منها فى مساحات المربعات الصغيرة التى تكون الشكل السابق .

ولتعـرُّف الخاصـية السـحرية اطلب من صـديق لك أن يختـار رقمـاً من هذا

المربع ثم ضع عملة معدنية فوق هذا الرقم ثم غط بقية الأرقام فى نفس الصف ونفس العمود بمربعات صغيرة من الورق الأبيض .

ثم اطلب من صديقك أن يختار رقماً آخر من الأرقام غير المغطاة، ضع عملة معدنية فوق هذا الرقم، ثم غط بقية الأرقام فى نفس الصف والعمود بمربعات صغيرة من الورق وكرر هذا العمل مرتين أخريين، فيبقى رقم واحد غير مغطى، ضع عليه عملة معدنية. وإذا جمعت الأرقام التى تغطيها العملات المعدنية وهى أرقام اختارها صديقك أختياراً عشوائياً فتأكد أن مجموع هذه الأرقام هو ٥٧ .

وهذا المجموع لم يأت من قبيل الصدفة، فأنت سوف تحصل على نفس المجموع «٥٧» فى كل مرة تكرر فيها هذه التجربة .

وإذا كنت ممن يجدون متعة فى حل الألغاز الرياضية فسوف تجد نفسك ميالاً إلى التوقف عند هذه النقطة لإمعان النظر فى هذا المربع وتحليله لمحاولة اكتشاف سره .

وشأن هذا المربع شأن معظم الخدع والألغاز، فإن هذا المربع بسيط للغاية، وستجد أن هذا المربع السحرى ما هو إلا جدول مرتب بطريقة تشمل خدعة صغيرة، فقد كون هذا المربع من مجموعتين من الأعداد : الأولى هى ١٢ ـ ١ ـ ٤ـ ١٨ ـ صفر، والمجموعة الثانية هى ٧ ـ صفر ـ ٤ ـ ٩ ـ ٢ ومجموع هذه الأرقام هو «٥٧» .

ويمكنك تكوين هذا المربع عن طريق عمل مربع مقسم طولياً وعرضياً إلى خمسة مربعات صغيرة كما بالشكل التالى، ثم اكتب المجموعة الأولى من الأرقام

أفقيًا فوق الصف العلوى والمجموعة الثانية رأسيًا بجوار العمود الأول من المربع كما بالشكل .

	صفر	١٨	٤	١	١٢
٧	٧	٢٥	١١	٨	١٩
صفر	صفر	١٨	٤	١	١٢
٤	٤	٢٢	٨	٥	١٦
٩	٩	٢٧	١٣	١٠	٢١
٢	٢	٢٠	٦	٣	١٤

وإذا دققت النظر فى هذا المربع تبين كيفية تعيين الأرقام التى تشغل المربعات الصغرى. ففى الصف الأول نجد أن المربع الأول به الرقم ٧ وهو مجموع صفر + ٧ وأن الرقم ٢٥ فى المربع الثانى هو مجموع ٧ + ١٨ وأن ١١ هى مجموع ٧ + ٤ وهكذا الحال بالنسبة لبقية الأرقام .

ويمكنك تكون مربع سحرى من هذا النوع بأى حجم ترغب وبأى مجموعة من الأعداد تختار. ويمكن أن تكون هذه الأرقام (موجبة) أو (سالبة) ، أعدادًا صحيحة أو كسورًا، إن المربع الناتج سيكون له تلك الخاصية السحرية التى تعطى دائماً مجموعًا ثابتًا يساوى مجموع أرقام المجموعتين اللتين استخدمتا فى تكوينه.

والآن أصبح الموضوع واضحاً تمام الوضوح، لو أطلقنا على مجموعتى الأرقام التى كتبناها أعلى المربع السحرى وإلى يمينه كما بالشكل السابق اسم المجموعتين المولدتين لأرقام المربع السحرى. فإن أساس تلك التسمية هو أن

كل رقم من أرقـــام المـربع السـحـرى إن هـو إلا مـجـمـوع رقـمـــين من أرقـام المجموعتين المولدتين .

فلنفـرض أن صديقـك قد اختـار الأرقـام ١٩ - ١ - ١٨ - ٢٧ - ٢ . وأنك قمت بتغطية هذه الأرقام بالعملات المعدنية كما بالشكل التالى .

١٢	١	٤	١٨	صفر	
١٩	٨	١١	٢٥	٧	٧
١٢	**١**	٤	١٨	صفر	صفر
١٦	٥	**٨**	٢٢	٤	٤
٢١	١٠	١٣	**٢٧**	٩	٩
١٤	٣	٦	٢٠	**٢**	٢

ومن الواضح أن كل رقم مـن هذه الأرقـام إن هو إلا مـجـمـوع رقـمـين من المجـموعتـين المولدتين فالرقم ١٩ هو مـجموع ٧+١٢ والرقـم ١ هو صـفر +١ والرقم ٨ هو مجموع ٤+٤ والرقم ٢ هو مجموع ٢+ صفر .

وعلى ذلك فـإن مجمـوع الأرقام المـعطاة هو مجـموع أرقـام المجـموعـتين المولدتين .

ومن الواضح أن من قـواعد هذه اللعبـة أنه عندما يخـتار صـديقك رقمـاً فإنه عليك تغطية بقية أرقام الصف العمود الذى يقع فيها هذا الرقم، وهذا يضمن عدم تكرار أرقام المجموعتين المولدتين ويضمن بالتالى أن يكون مجموع الأرقام التى تغطيها العملات مساوياً لمجموع أرقام المجموعتين المولدتين (الشكل التالى) .

١٩	٨	١١	٢٥	٧
١٢	١	٤	١٨	صفر
١٦	٥	٨	٢٢	٤
~~٢١~~	~~١٠~~	~~١٣~~	~~(٢٧)~~	~~٩~~
١٤	٣	٦	٢٠	٢

ومن أسهل الطرق لتكوين جدول جمع على مصفوفة مربعة هو أن نبدأ بالرقم ١، ونضعه فى المربع العلوى الأيسر وتستمر بالأعـداد الصحيحة التالية من اليسار إلى اليمين .

إن مصفوفة رباعية من هذا النوع تصبح جدول جمع لمجموعتى الأرقام « ١، ٢، ٣، ٤ »، «صـفـر، ٤، ٨، ١٢» فى الشكل الـتـالى ، ومن الواضح أن مـجـمـوع الأرقام المـغطاة بالعملات فـى هذه الحالة هو مجـموع أرقام مـجموعـتى الأرقام المولدتين أى «٣٤» .

ومن الواضح أيضًا أن هذا المـجموع (٣٤) ليس ثابتـاً، ولكنه يتغير مع تغـير حجم المربع .

١	٢	٣	٤	
١	٢	٣	٤	صفر
٥	٦	٧	٨	٤
٩	١٠	١١	١٢	٨
١٣	١٤	١٥	١٦	١٢

ويمكن حساب هذا المجموع باتباع الطريقة السابق ذكرها فى حساب الرقم السحرى والتى تستخدم القانون التالى :

$$\text{المجموع} = \frac{(ن^{٣} + ن)}{٢}$$

حيث «ن» = عدد المربعات الصغرى X ضلع واحد من أضلاع المربع

ففى حالة الشكل السابق يكون المجموع

$$= \frac{ن^{٣} + ن}{٢} = \frac{٤^{٣} + ٤}{٢} = \frac{٦٤ + ٤}{٢} = \frac{٦٨}{٢} = ٣٤$$

أما إذا بدأت تكوين المصفوفة برقم يزيد عن (١) نفترض أنه «س» فإن المجموع يحسب من القانون التالى :

$$\text{المجموع} = \frac{ن^{٣} + ن}{٢} + ن \quad (س - ١)$$

حيث «س» هى الرقم الابتدائى، و«ن» هو عدد المربعات الصغيرة فى أحد أضلاع المربع. وجدير بالذكر أن هذا المجموع هو نفس المجموع لأرقام أى صف أو عمود فى أى مربع سحرى من النوع التقليدى إذا كونّاه باستخدام نفس الأرقام السابقة .

مصفوفات سحرية حسب الطلب

باستخدام التعبير الأخير: $\frac{ن^{٣} + ن}{٢} + ن \quad (س + ١)$

يمكننا أن نحسب الرقم الذى نبدأ به لتكوين مصفوفة من حجم معين نختاره، ويكون المجموع فيها أى رقم نريده .

ويمكنك إثارة انتباه الآخرين وإعجابهم لو أنك طلبت من أحدهم اختيار رقم يزيد على الثلاثين (وذلك لتجنب إدخال أرقام سالبة فى المصفوفة) ثم شرعت فى حساب المصفوفة التى يكون مجموع الأرقام المغطاة بالعملة فيها هو الرقم الذى اختاره صديقك، وبدلاً من استخدام العملات المعدنية والمربعات الورقية يمكنك أن تطلب من صديقك أن يضع دائرة حول الرقم الذى يختاره، ثم ترسم خطاً مستقيماً فوق أرقام الصف والعمود الذى يقع فيهما هذا الرقم .

فلو أن صديقك اختار رقم ٤٣ فعليك أن تطرح منه ٣٠ فيبقى ١٣، اقسم الـ ١٣ على ٤ تحصل على ٣,٢٥ ، فإذا وضعت هذا الرقم فى المربع العلوى الأيسر من مصفوفة رباعية ثم أخذت فى ملء المربعات بالترتيب بالأرقام ٤,٢٥، ٥,٢٥، ٦,٢٥، ... فإنك تحصل على مربع سحرى مجموع أرقامه المغطاة هو ٤٣ وهو الرقم الذى اختاره صديقك كما فى الشكل التالى .

٣,٢٥	٤,٢٥	٥,٢٥	٦,٢٥
٧,٢٥	٨,٢٥	٩,٢٥	١٠,٢٥
١١,٢٥	١٢,٢٥	١٣,٢٥	١٤,٢٥
١٥,٢٥	١٦,٢٥	١٧,٢٥	١٨,٢٥

ويمكنك أن تجعل المربع السحرى أكثر إثارة للدهشة والتعجب لو أنك جعلت ترتيب الأرقام مبعثراً كأن تضع الرقم ٣,٢٥ فى الصف الثالث مثلاً وأن تضع الأرقام التالية وهى ٤,٢٥، ٥,٢٥، ٦,٢٥ فى نفس الصف وبترتيب عشوائى، ثم تكتب الأرقام الأربعة التالية فى أى صف آخر، ولكن بنفس الترتيب كما فى الصف السابق ، كرر العمل بنفس الطريقة فى الصفين الباقيين فتحصل على مربع سحرى يشبه المربع التالى :

١٦,٢٥	١٨,٢٥	١٥,٢٥	١٧,٢٥
٨,٢٥	١٠,٢٥	٧,٢٥	٩,٢٥
٤,٢٥	٦,٢٥	٣,٢٥	٥,٢٥
١٢,٢٥	١٤,٢٥	١١,٢٥	١٣,٢٥

أما إذا كنت ترغب فى تجنب الكسور، وما زلت راغباً فى الحصول على الرقم ٤٣ كمجموع للأرقام المغطاة فيمكنك حذف الكسر (٢٥, فى هذه الحالة) من كل رقم ثم تضيف واحداً إلى الأرقام الأربعة الأخيرة بحيث تصبح ١٦، ١٧، ١٨، ١٩ . ويجب أن تلاحظ أنه يجب عليك أن تضيف ٢ إلى هذه الأرقام الأربعة إذا كان الكسر $\frac{٢}{٣}$ ، أو تضيف ٣ إذا كان الكسر $\frac{٣}{٤}$.

ومبادلة ترتيب الصفوف والأعمدة لا يؤثر على خاصية المربع السحرية ، كما أن توزيع الأرقام بهذه الطريقة يجعل المصفوفة تبدو أكثر غموضاً مما هى عليه .

لغز الأرقام المنزلقة

يتكون هذا اللغز من مربع مقسم إلى ١٦ مربعًا متساويًا . وترتب فيها الأرقام من ١ إلى ١٥ ، ويبقى مربع خالٍ كما فى شكل رقم ١ .

١		٣	
٥		٧	
٩		١١	
١٣		١٥	

شكل رقم (١)

والمطلوب هنا هو إعادة ترتيب أرقام شكل رقم (١) حتى نصل لها إلى أى نوع من أنواع الترتيبات التى تتبع نظاماً معيناً بحيث تكون الأرقام مسلسلة ، ومن أمثلة هذه الترتيبات المذكور فى شكل رقم (٢) .

١	٥	٩	١٣
٣	٧	١١	١٥

شكل رقم (٢)

والمربعات ذات الأرقام تنزلق بحرية تامة داخل صندوق يصنع عادة من البلاستيك ، وتكون صعوبة حل اللغز فى ضرورة تحريك المربعات ذات الأرقام داخل الصندوق بدون رفعها من داخل الصندوق حتى تصل إلى الوضع الجديد، ويمكن تحقيق ذلك بتحريك أحد المربعات إلى المربع الخالى. وواضح أنه

بالنسبة للشكل رقم (١) فإن الحركة الأولى ستكون للمربع رقم ١٢ أو المربع رقم ١٥ لأنهما يجاوران المربع الخالى. وهذا اللغز هو أحد الألغاز العديدة التى اخترعها (سام لويد)، وبعد أن ظهر هذا اللغز فى عام ١٨٧٨ ظل لعدة سنوات محبوباً. وحتى اليوم فإنه يمكن شراء هذا اللغز من محلات اللعب .

وفى القرن ١٩ انتشرت هذه اللعبة فى كل الأوساط والأماكن وما زالت حتى اليوم منتشرة بين الناس وقد أدخل عليها تعديلات بحيث أصبحت محببة للصغار.

وبعد فترة قصيرة من ظهور هذا اللغز ، أعلن عن جوائز مالية كبيرة لمن يقوم بترتيب الأرقام بطريقة أو بأخرى .

وتقدم العديدون بحلول لهذا اللغز ولكن أحدًا لم يكن يذكر جيدًا الخطوات التى يسلكها، بحيث يصل إلى الترتيب المطلوب ، وعلى ذلك فإن أحدًا لم يكن يستحق الجوائز التى أعلن عنها .

ولقد توصل اثنان من علماء الرياضيات الأمريكيين إلى أن هناك ما يزيد على عشرة تريليون ترتيب لهذه الأرقام لا يمكن تحقيقها .

كما أنه أمكن اليوم القضاء على من يحاولون الغش، فقد صنعت اللعبة بحيث تتحرك المربعات رأسياً أو أفقياً ولكنه لا يمكن رفعها من أماكنها .

ترتيب الأرقام:

كما يبين شكل رقم (١) يتكون اللغز من صندوق مقسم إلى ١٦ مربعاً متساوياً توضع فيها ١٥ مربعاً مرقماً .

وبالاستعانة بمعلوماتنا فى الرياضيات، يمكنا أن نحسب عدد الطرق التى يمكن بها ترتيب هذه المربعات المرقمة .

إن عـدد هذه الطرق المـختلفـة = ١٦× ١٥× ١٤× ...... × ٣ × ٢ × ١ =
٢٠٩٢٢٧٨٩٨٨٨٠٠٠

أى حوالى ٢١ تريليون طريقة . وقد تبـين أن نصف هذه الطرق يمكن تحقيقه وأن النصف الآخر لا يمكن تحقيقه .

عدد الطرق المختلفة = ٠٠٠ ٨٨٨ ٧٨٩ ٩٢٢ ٢٠

عدد الطرق الممكنة = ٠٠٠ ٩٤٤ ٣٩٤ ٤٦١ ١٠

عدد الطرق غير الممكنة = ٠٠٠ ٩٤٤ ٣٩٤ ٤٦١ ١٠

كيف يمكنك معرفة الترتيبات الممكنة وغير الممكنة :

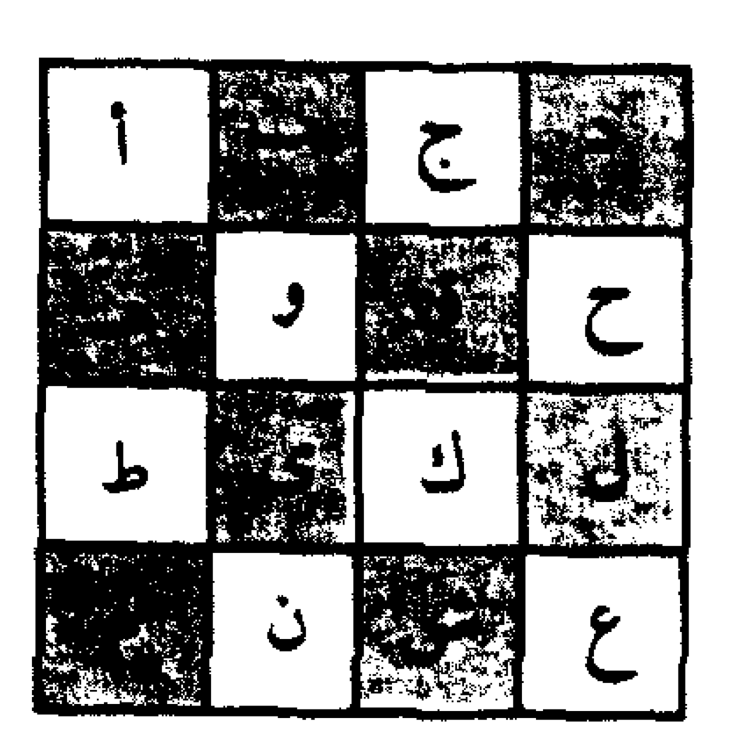
إذا نظرنا إلى شكل رقم (١)

نجد أن كل رقم يظهر فى ترتيبه الطبيعى بحيث لن نجد هناك رقمًا يسبقه رقم يصغره . ولكن ترتيب الأرقام يتغير، إذا قمنا بترتيب هذه الأرقام بطريقة أخرى .

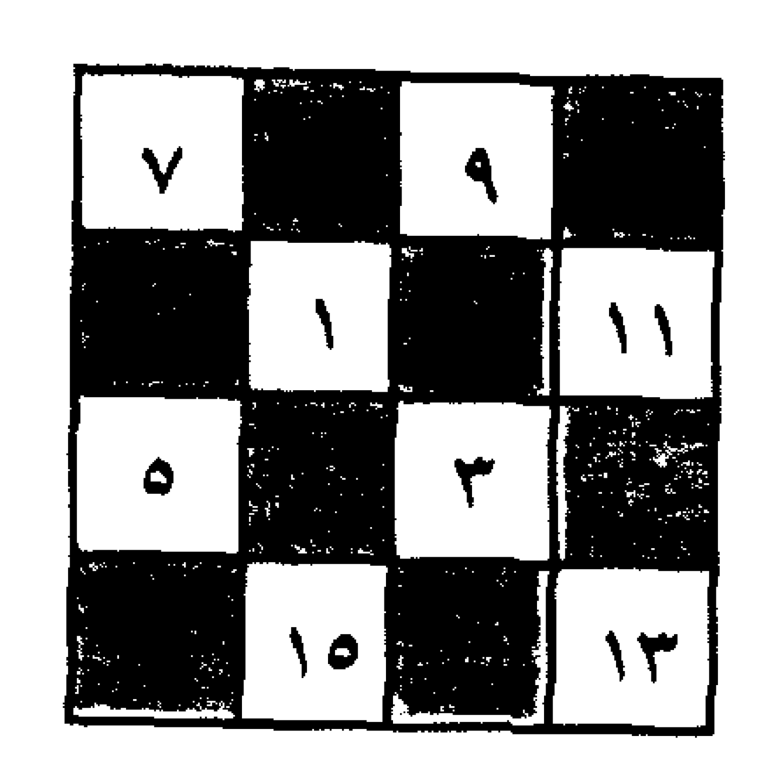
ومن إحصاء مجموع الحالات التى يسبق فـيها رقم معين الأرقام التى تصغره يمكننا تحديد ما إذا كان هذا الترتيب ممكنًا أو غير ممكن .

تفاصيل الطريقة:

١ـ انظر إلى الرقم الذى يشـغل المـربع (أ) فى التـرتيب شكل رقم (٣) وإلى المربع المـقابل له فى الشكل رقم (٤) المراد التعـرف عليه من حيث كونه تـرتيبًا ممكنًا أو غير ممكن، وسوف تجد أن الرقم المقابل للمربع (أ) هو الرقم (٧) .



شكل رقم (٣) اسماء المربعات



شكل رقم (٤) ترتيب ممكن

١٥		١٣	١٢
١١		٩	
٧		٥	
٣		١	

شكل رقم (٥) غير ممكن

٢ ـ ابحث فى باقى المـربعـات عن أرقـام تقل عن هذا الرقم (٧) مع اعـتبـار المربع الخالى مشغولاً بالرقم ١٦ . ويكرر هذا بالنسبة للمربعات التالية .

٣ـ إذا كان المربع الخالى يشـغل أحد المربعات المظللة فى شكل رقم (٣)، فيجب إضافـة واحد إلى المجموع ولا يضاف شىء إذا كان المـربع الخالى واقعاً فى أحد المربعات غير المظللة .

٤ـ إذا كان المجموع الكلى عدداً زوجياً كان الترتيب الموجود ترتيبًا ممكنًا.

٥ ـ إذا كان المـجمـوع الكلى عدداً فـردياً كان الترتيب الـموجود ترتيـبًا غـير ممكن.

مثال عملى:

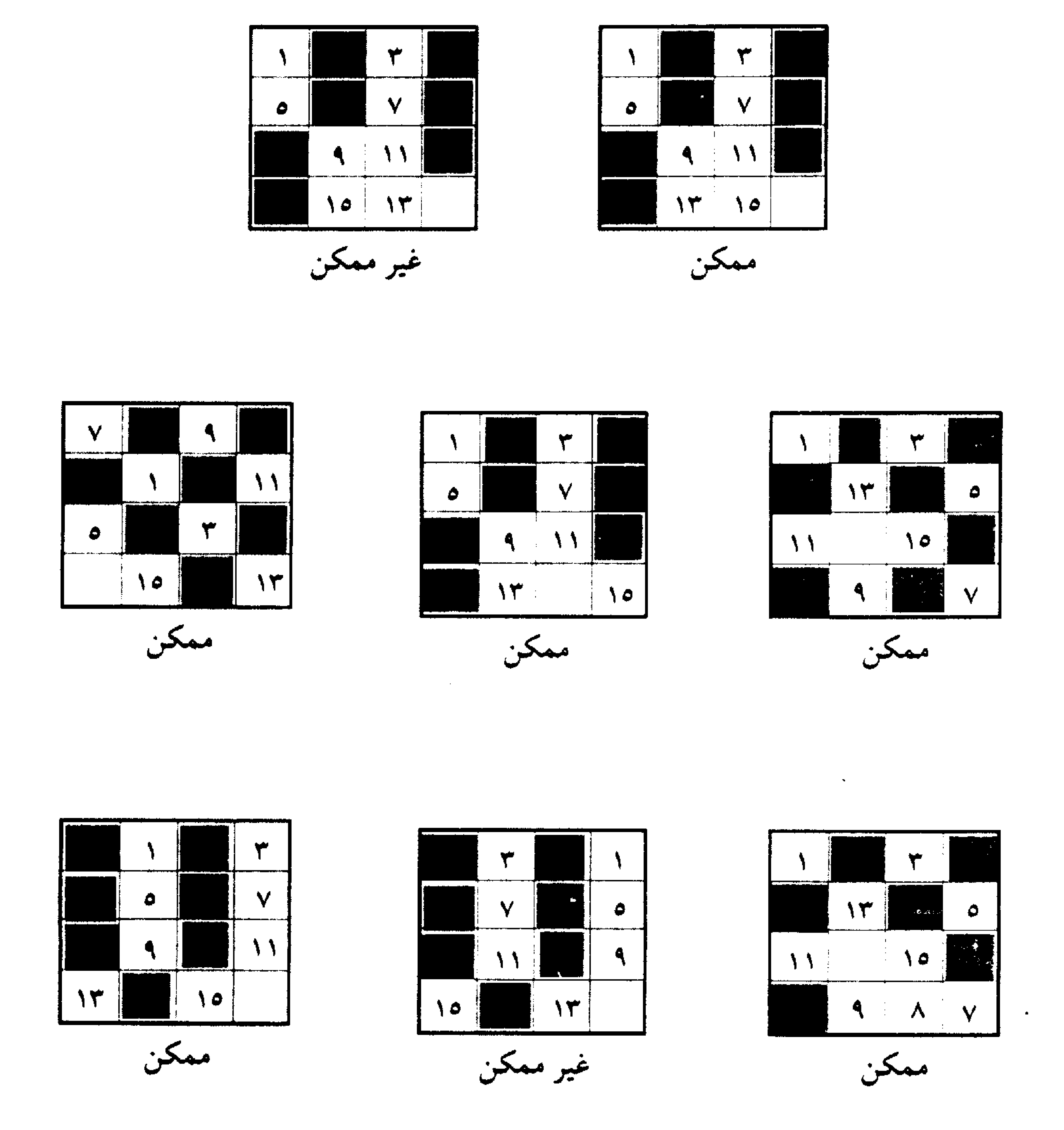
انظر إلى الترتيب المبين فى شكل رقم(٤) تجد أن المربع (أ) فى شكل رقم (٣) يقابله الرقم (٧) فى شكل رقم (٤). وبالبحث فى باقى المربعات عن أرقام تقل عن الرقم (٧) نجد ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ وعدد هذه الأرقام ٦. وفى الجدول التالى نجد أمام رقم المربع العدد ٦ بالنسبة للشكل رقم ٤ ورقم ١٤ بالنسبة للشكل رقم ٥ لأن المربع (أ) يقابله الرقم (١٥) وبالتالى فإن الأرقام الأقل من ١٥ هى ١٤، ١٣، ١٢، ١١، ١٠، ٩، ٨، ٧، ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١ وعددها ١٤ رقمًا.

وفى المربع رقم (ب) من الترتيب شكل رقم (٤) نجد المقابل له هو الرقم (٨)، وأن المربعات الأخرى بها أرقام أقل من ٨ وهى ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١ وعددها ٦ أرقام حيث لم يدخل فى الحساب الرقم (٧) الموجود فى المربع (أ) لأنه سبق حسابه وبالتالى لا يدخل فى الحساب كل رقم مربع تم حسابه من قبل. وبالتالى يوضع فى الجدول الرقم ٦ أمام الحرف (ب) .. وهكذا تكرر العملية بالنسبة لكل المربعات. ويوضع فى الاعتبار الخطوات المذكورة فى تفاصيل الطريقة.

رقم المربع	عدد الأرقام التالية التى تقل عن هذا الرقم	
	الترتيب شكل رقم (٤)	الترتيب شكل رقم (٥)
أ	٦	١٤
ب	٦	١٣
ج	٦	١٢
د	٦	١١
هـ	٥	١٠
و	صفر	٩
ذ	صفر	٨
ح	٣	٧
ط	٢	٦
ى	١	٥
ك	صفر	٤
ل	صفر	٣
م	٣	٢
ن	٢	١
ش	١	صفر
المربع الخالى	(مظلل) صفر	(غير مظلل) صفر
المجموع	٤١	١٠٥
المكان الخالى	+ ١	+ صفر
المجموع الكلى	٤٢ (زوجى)	١٠٥ (فردى)
هل الترتيب ممكن ؟	نعم	لا

جدول يوضح طريقة التعرف على الطرق الممكنة لترتيب الأرقام أو غير الممكنة

وفيـما يلى عـدد من الترتيـبات ومطلوب منك التـأكد من صحـة ما هو مـبين تحتها :



يلاحظ أن تظليل المربعات يعود إلى التظليل الثابت فى شكل رقم (٣) الذى به أسماء المربعات والشكل رقم (٤) المقابل له .

ألغاز وأحجية أكثر تقدمًا

لغز الأشكال متعددة المربعات (البولى أومينو)

كان أول من أدخل هذا اللفظ العالم (سولومـون جولومب) عالم الرياضيات بمعمل الدفع النفـاث فى معهد كاليفـورنيا للتكنولوجيا . وقد كتـب عدة مقالات عن الموضـوع نشرت فى مـجلة الرياضيـات الأمريكيـة عام ١٩٥٤ ، عندمـا كان طالباً فى الدراسـات العليا فى جـامعة هارفـارد ، وكان عـمره فى ذلك الوقت ٢٢ عامًـا، وفى هذه المـقالات عـرف «البولى أومـينو» بأنه مجـموعـة من المربـعات المتصلة ببعضها البعض بـطريقة بسيطة، وهذا يعنى أن هذه المربعات متصلة على طول أضلاعها .

أحادى المربع

ثنائى المربع

ثلاثى المربع

ثلاثى المربع قائم

رباعى المربع المستقيم

رباعى المربع

رباعى المربع على شكل حرف T

رباعى المربع على شكل حرف L

رباعى المربع عمودى

شكل رقم (١)

أشكال خماسى المربع الاثنا عشر
شكل رقم (٢)

ويبين شكل رقم (١)، الشكل أحادى المربع وأنواع أخرى تحتوى على مربعين ، وثلاثة وأربعة متصلة ببعضها البعض. وهناك نوع واحد من ثنائى المربع ونوعان من ثلاثى المربع وأربعة أنواع من رباعى المربع، أما بالنسبة لخماسى المربع فهناك ١٢ نوعًا مذكورة فى شكل رقم (٢) ويلاحظ أن الشكل إذا قلب يعطى شكلاً مختلفاً ويعتبر ذلك نوعاً واحداً .

لغز قطع الدومينو ورقعة الشطرنج:

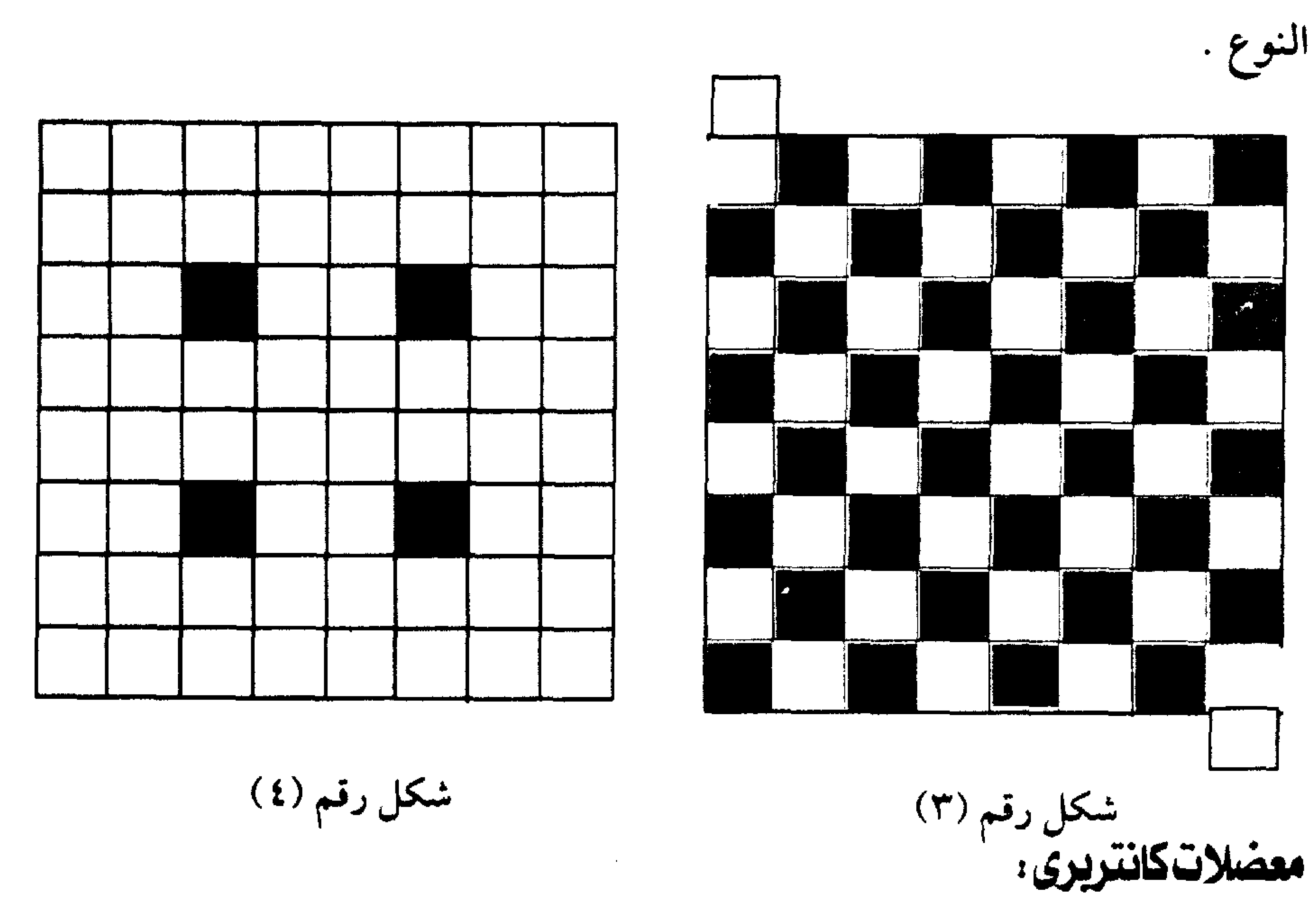
يحتاج هذا اللغز إلى رقعة شطرنج يمكنك القيام برسمها على قطعة من الورق، كما تحتاج إلى ٣٢ قطعة من قطع (الدومينو) تكفى كل قطعة لتغطية مربعين من مربعات رقعة الشطرنج ، ويمكنك استبدال قطع الدومينو بقطع من الورق المقوى تكفى كل قطعة منها لتغطية مربعين من مربعات رقعة الشطرنج .

والآن أقطع مربعين من ركنين متقابلين من رقعة الشطرنج (شكل رقم ٣) واستبعد إحدى قطع الدومينو، والمطلوب هو وضع قطع الدومينو الـ ٣١ فوق رقعة الشطرنج لتغطية المربعات المتبقية والتى عددها ٦٢ مربعًا، فهل هذا أمر ممكن ؟!

إذا كان كذلك، بيِّن كيف يمكن تنفيذ ذلك أو اثبت العكس .

من الواضح أنه لا يمكن تغطية رقعة الشطرنج بأشكال ثلاثية المربعات، وذلك لأن الرقم ٦٤ لا يقبل القسمة على ٣. ولكن يمكن تغطية هذه الرقعة باستخدام ٢١ شكلاً مستقيمًا من ثلاثة مربعات وشكلاً واحدًا ذا مربع واحد. على أن يوضع الشكل ذو المربع الواحد فى إحدى أربعة أماكن بينها الشكل رقم (٤)،

ولكن النظرة المدقـقة تبين أنه يمكن تغطية الرقـعة باستخدام ٢١ شـكلاً قائماً من ثلاثة مربعات مع وضع الشكل ذى المربع الواحد فى مكان نختاره. كما أنه يمكن تغطية الـرقعة باسـتخدام ١٦ شكلاً رباعـى المربع بشرط أن تكون كلـها من نفس النوع .



شكل رقم (٣)

شكل رقم (٤)

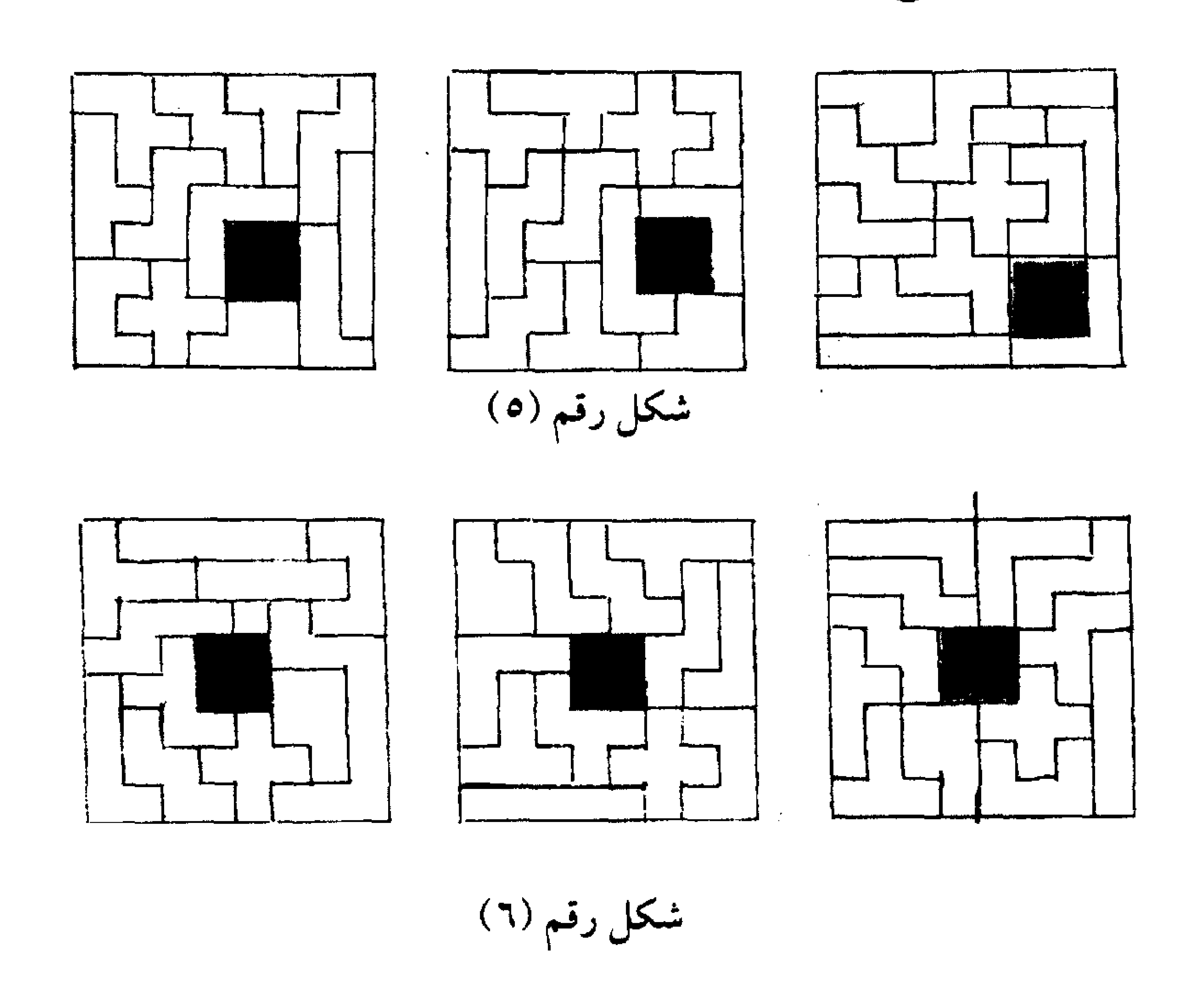
معضلات كانتربرى:

إذا انتقلنا إلى الأشكال خماسية الـمربعات الموجودة فى شكل رقم (٢) يبرز على الفور السؤال التالى: هل يمكن تكوين رقعة شطرنج باستخدام هذه الأشكال الاثنتى عشرة (١٢) مع إضافة شكل واحد رباعى المربع ؟!

وقد نشـر أول حل لهذه المعضلة عـام ١٩٠٧ فى مقال كتـبه (هنرى رودنى) تحت عنوان معضـلات كانتربرى، وفى الحل الذى اقترحـه رودنى نجد أن المربع يحـتل مكاناً جانبـياً ومنذ حـوالى ٤٠ عامًـا قام (دوسـون) مؤسس مـجلة شطرنج الجنة بعـمل طريقة بسـيطة لدرجة مـذهلة لإثبات أن مـعضلة رودنى يمكن حـلها بوضع الشكل الـمـربع على أى مكان من الرقـعـة، ويبـين شـكل رقم (٥) حلوله الثلاثة .

ولا أحد يعـرف كم حلاً يمكن وضعهـا لهذه المعـضلة وهناك رأى يقول: إن لها مائة ألف حل.

وفى عام ١٩٥٨ كان (دانا سكوت) طالباً بالدراسات العليا وكان قد طلب من الحاسب الآلى المدعو مانياك أن يبحث عن كل الحلول الممكنة التى تكون فيها القطعة المربعة فى وسط الرقعة تمامًا. وبعد عمل دام ثلاث ساعات ونصف قدم الحاسب الآلى قائمة بـ ٦٥ حلاً متميزاً . وعند عمل برنامج الحاسب الآلى كان من المفيد تقسيم الحلول إلى ثلاث مجموعات يحدد كل منها وضع الشكل الصليبى بالنسبة للمربع المركزى .



شكل رقم (٥)

شكل رقم (٦)

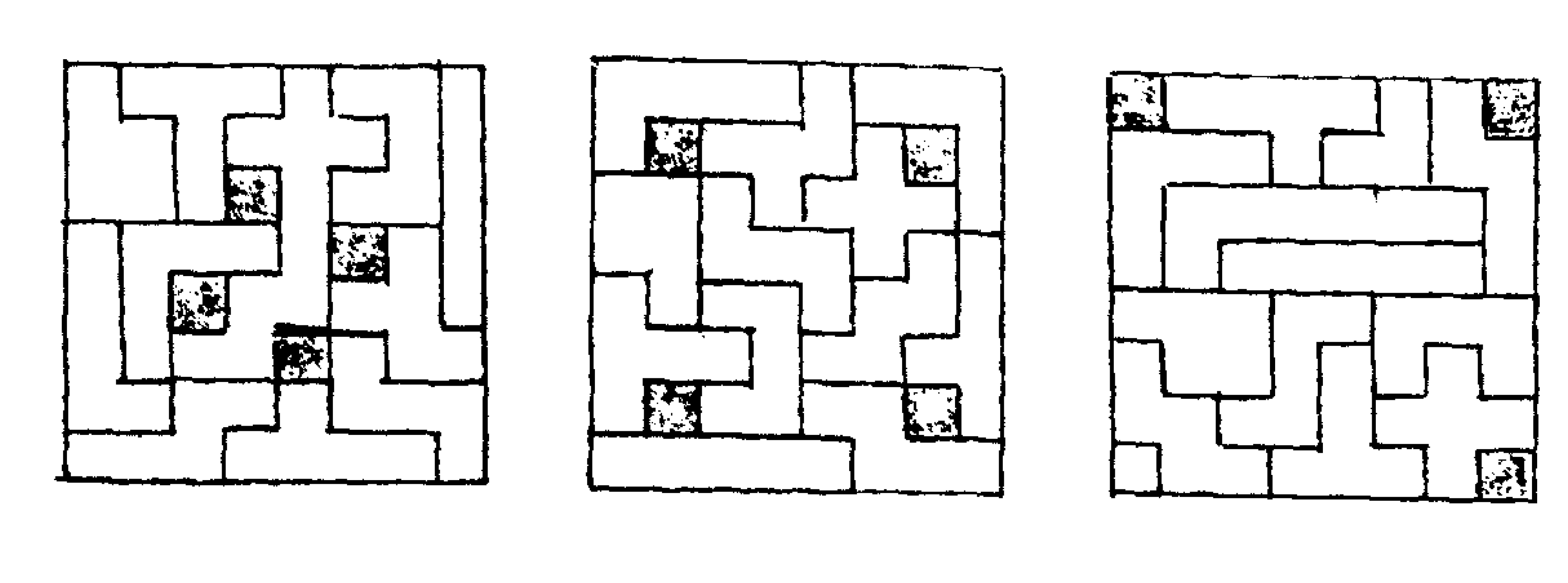
ويبين شكل رقم (٦) أحد الحلول فى كل من المجموعات الثلاث، ولقد وجد الحاسب الآلى ٢٠ حلاً للنوع الأول و ١٩ حلاً للنوع الثانى و ٢٦ حلاً للنوع الثالث. ويبين فحص هذه الحلول عدداً من الحقائق حيث لا يخلو عدد من هذه الحلول من خماسى المربع المستقيم يقف بجوار أحد جوانب الرقعة ملتصقاً بهذا الجانب (ولا ينطبق هذا على الحلول التى يكون فيها المربع فى مكان آخر غيرمركز الرقعة) وتخلو الحلول لسبعة طرق (كلها فى المجموعة الأولى والثالثة)

من «الطرق المتقاطعة» أى النقط التى تتلاقى عندها أركان أربع قطع. ويلاحظ أن الحل الأول فى شكل رقم (٦) من هذا النوع، ويبين الحل الثالث من شكل رقم (٦) ظاهرة مشوقة حيث يوجد خط مستقيم يمكن عنده ثنى الشكل إلى نصفين .

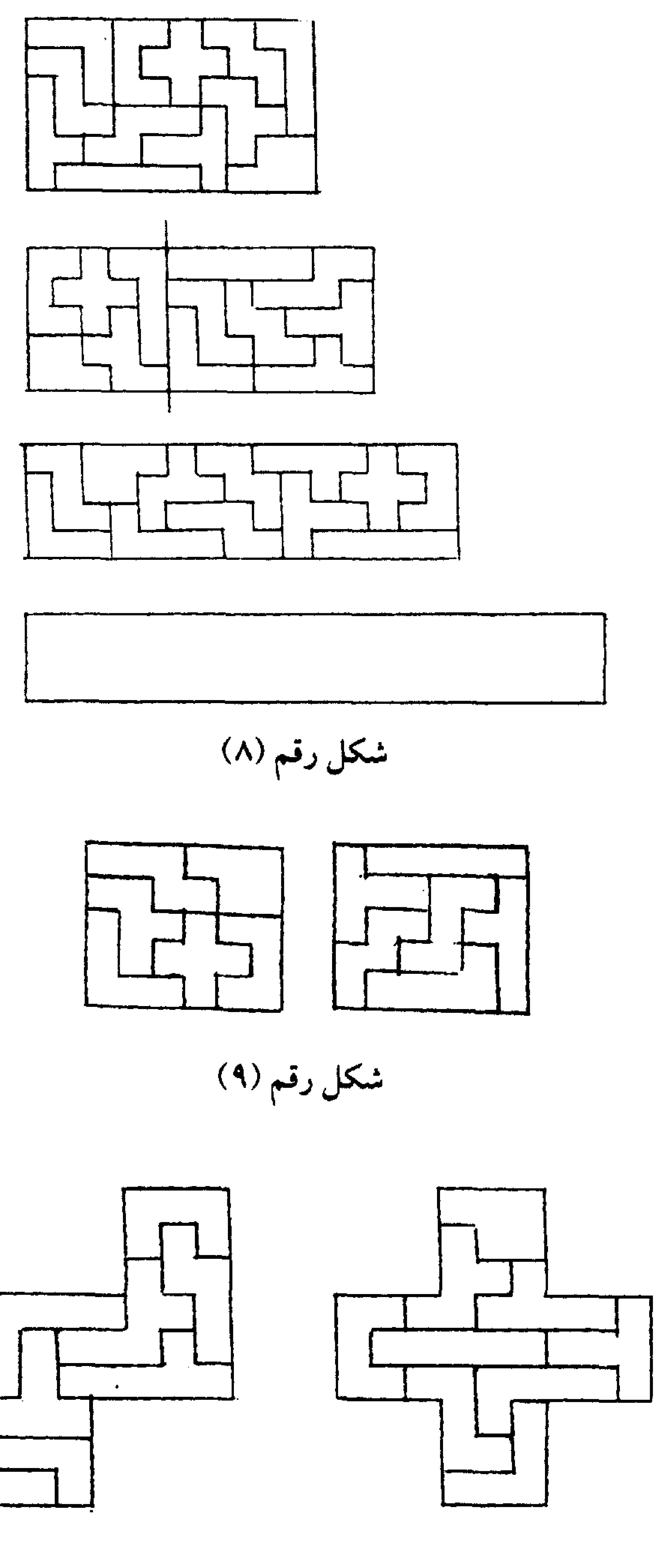
إذا استبعدنا الشكل رباعى المربع، وتركنا أربع وحدات مربعة غير متصلة خالية، أمكننا تغطية رقعة الشطرنج بعدد كبير من الطرق الفنية، ويبين شكل رقم (٧) ثلاثًا من هذه الأشكال .

كذلك يمكن ترتيب قطع الشكل خماسى المربع والتى عددها ١٢ شكلاً داخل مستطيلات أبعادها ٦ × ١٠ مربعات، ٥ × ١٢ مربعًا، ٤ × ١٥ مربعًا، ٣ × ٢٠ مربعًا (شكل رقم ٨) وقد تركنا المستطيل الأخير للقارئ الذكى ليكونه بنفسه .

وفى شكل رقم ٨ يلاحظ أن المستطيل ٥ × ١٢ مربعًا هوعبارة عن مستطيلين أبعادهما ٥ × ٧ مربعات، ٥ × ٥ مربعات، وقد توصل عدد من المفكرين إلى مستطيلين ٥ × ٦ مربعات كما فى شكل رقم (٩) واللذان يمكن وضعهما متلاصقين ليكونا مستطيلاً أبعاده ٥ × ١٢ مربعًا أو ٦ × ١٠ مربعات .



شكل رقم (٧)



شكل رقم (٨)

شكل رقم (٩)

شكل رقم (١٠)

المعضلة الثلاثية:

أما الأستاذ (رفائيل روبنسون) أستاذ الرياضيات فى جامعة كاليفورنيا فقد اقترح ما أطلق عليه اسم «المعضلة الثلاثية» وهى عبارة عن اختيار إحدى قطع الشكل خماسى المربع، ثم استخدام ٩ قطع من القطع الباقية لتكوين نموذجًا كبيرًا من القطعة المختارة، وسيكون هذا النموذج أكبر ثلاث مرات من القطعة الصغيرة طولاً وعرضاً. ويبين شكل رقم (١٠) اثنين من حلول هذه المعضلة .

ما هى عدد الطرق التى يمكنك بها ترتيب قطع الشكل خماسى المربع الاثنتى عشرة؟

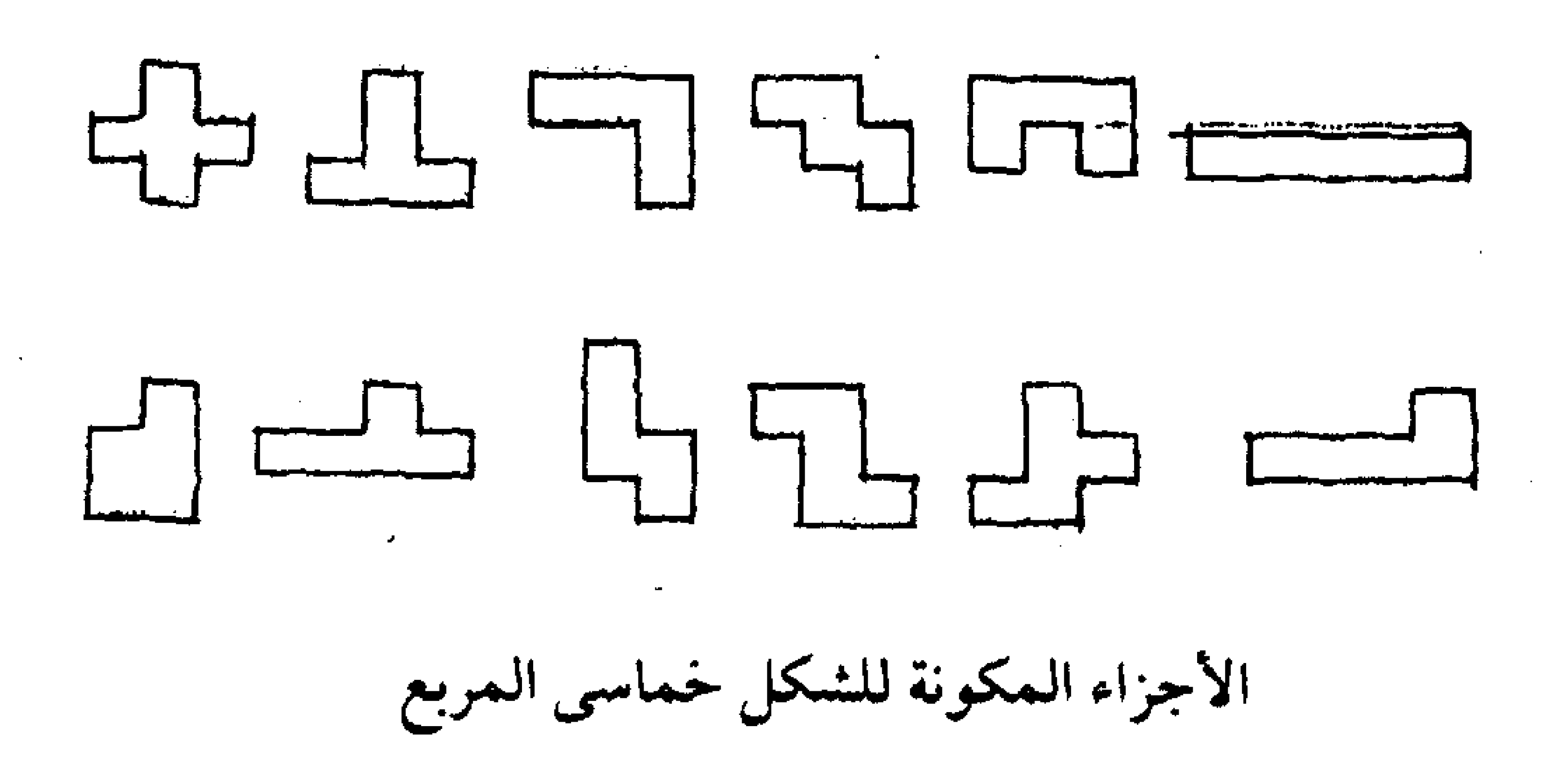
كما سبق أن أوضحنا أن الشكل خماسى المربع يتكون من خمسة مربعات متساوية ومتلاصقة وأن هناك ١٢ طريقة ممكنة لترتيب هذه المربعات الخمسة .

والمطلوب هو ترتيب هذه القطع فى صندوق مستطيل الشكل يبلغ طوله عشرة أضعاف طول ضلع كل من المربعات الصغيرة التى يتكون منها الشكل خماسى المربع ويبلغ عرضه ستة أضعاف طول ضلع هذا المربع الصغير .

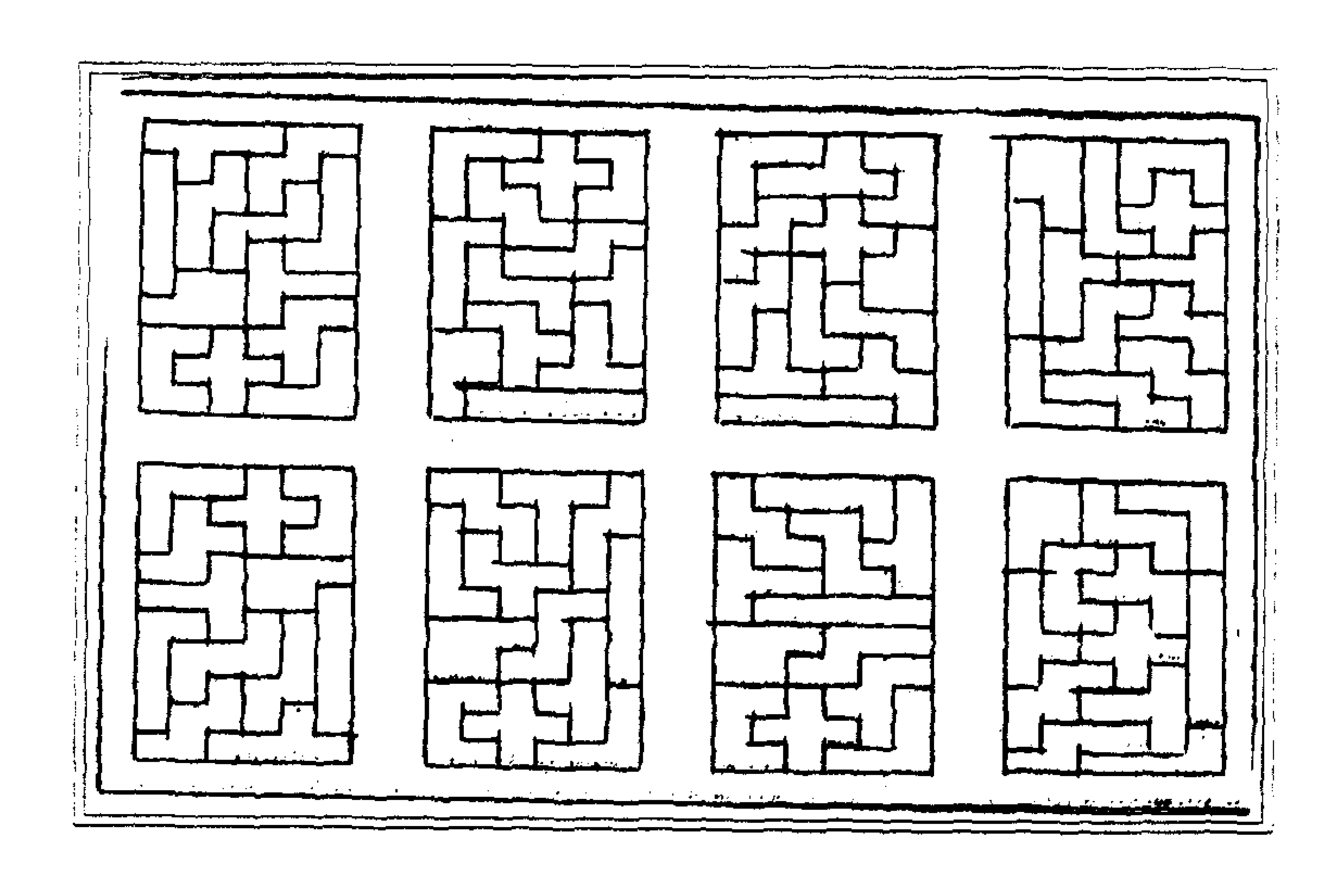
إن هناك أكثر من ٢٠٠٠ طريقة لترتيب هذه القطع داخل الصندوق ولكنها ليست بالسهولة التى تتصورها .

ويمكن للقارئ صنع قطع تمثل الأشكال الـ ١٢ السابق الإشارة إليها فى شكل رقم (٢)، من الورق المقوى أو الخشب الخفيف ويمُكن تلوينها بألوان مختلفة وصنع صندوق صغير أو رسم مستطيل على قطعة من الورق ترتب داخل قطع الشكل خماسى المربع .

وفى الشكل التـالى توضح ٨ طرق لتـرتيب قطع الشكل خـماسى المـربع فى مستطيل مقاس ٦ × ١٠ مربعات .



الأجزاء المكونة للشكل خماسى المربع



طرق ترتيب قطع الشكل خماسى الربع

اللاعب اللص (لعبة نيم)

إن لعبة نيم من أقدم اللعبات الرياضيـة التى يلعبها اثنان، ويعتقد أن أصل هذه اللعبة صينى، وهى تُلعَب بقطع من الورق أو بالعملات المعدنية .

ولهذه اللعبة صور كثيرة، ومن أكثرها انتـشاراً تلك الصورة التى يستخدم فيها ١٢ عملة معـدنية ترتب فى ٣ صفوف أفـقية بحيث يحـتوى الصف الأول على ٣ عملات، والثانى أربعه ، والثالث خمس .

وقواعد اللعبة سهلة وبسيطة يتبادل اللاعبان أخذ عملة معدنية أو أكثر، بشرط أن تكون هذه العملات فى صف أفقى واحد. واللاعـب الذى يأخذ العملة الأخيرة هو الفـائز، وعندما يكتـشف اللاعب المـاهر أنه يستطيع أن يفـوز دائماً إذا كـانت حركاتـه تترك صفين يحـتوى كل منهما على أكـثر من عملة واحدة ويحـتوى كل منهما عـلى نفس العدد من العملات . أو إذا كـانت حركته تترك عـملة واحدة فى أحـد الصفـوف وعـملتـين فى صف ثان وثلاثة فى صف ثالث. كـمـا أن اللاعب الأول يستطيع أن يفوز بالتأكيد إذا أخذ عملتين من أول صف ثم استمر فى اللعب بصبر وحكمة .

اكتشاف مذهل:

ولا يوجـد فى هذا التـحليـل السـابق مـا يزعج . غـيـر أنه قـرب بداية القـرن العشرين ، تم اكتشاف حقيقة مذهلـة، تتعلق بهذه اللعبة فقد تبين أنه يمكن تعميم هذه اللعبة إلى أى عدد من الصفوف، يحتـوى كل منها على أى من العملات كما

تبين أن هناك استراتيجية بسيطة للغاية، تعتمد على نظام الأعداد الثنائية وتمكن اللاعب من اللعب بإتقان والفوز بسهولة. وأول من سمى هذه اللعبة باسم لعبة نيم هو العالم الرياضى « بوتون» وهى تعنى باللغة الأنجليزية القديمة الأخذ أو السرقة. وحسب تعبير بوتون فإن أى مجموعة من العملات تكون وضعاً آمناً أو وضعاً غير آمن؛ وإذا كان الوضع الذى تركه اللاعب بعد تحركه يضمن الفوزلذلك اللاعب فإن ذلك وضع آمن. وإذا لم يكن كذلك فهو غير آمن، ففى لعبة وضع فيها ٣، ٤، ٥ عملات كما فى شكل واحد، فإن اللاعب الأول يترك وضعاً آمناً إذا أخذ عملتين من الصف الأعلى. وكل وضع غير آمن يمكن أن يتحول إلى وضع آمن عن طريق حركة مناسبة ، والعكس صحيح . وإذا أراد اللاعب أن يلعب بحكمة، فإن عليه أن يتحرك بحيث يحوِّل كل وضع غير آمن إلى وضع آمن .

ولتعيين ما إذا كان آمنًا أو غير آمن، نكتب بالطريقة الثنائية أعداد العملات فى كل صف. فإذا كان مجموع كل عمود هو صفر أو عدد زوجى فإن الوضع آمن .

أما إذا لم يكن كذلك فإن الوضع غير آمن .

الرقم بالطريقة العشرية	الرقم بالطريقة الثنائية				
	$٢^{٠}$	$٢^{١}$	$٢^{٢}$	$٢^{٣}$	$٢^{٤}$
	١	٢	٤	٨	١٦
١	١				
٢	٠	١			
٣	١	١			
٤	٠	٠	١		
٥	١	٠	١		
٦	٠	١	١		
٧	١	١	١		
٨	٠	٠	٠	١	
٩	١	٠	٠	١	
١٠	٠	١	٠	١	
١١	١	١	٠	١	
١٢	٠	٠	١	١	
١٣	١	٠	١	١	
١٤	٠	١	١	١	
١٥	١	١	١	١	
١٦	٠	٠	٠	٠	١
١٧	١	٠	٠	٠	١
١٨	٠	١	٠	٠	١
١٩	١	١	٠	٠	١
٢٠	٠	٠	١	٠	١

شكل رقم (١) جدول الأرقام الثنائية

الطريقة الثنائية لكتابة الأعداد :

ليست هذه الطريقة بالأمر الصعب، فجدول رقم ١ يبين المكافآت الثنائية للأرقام من واحد إلى ٢٠ وهو جدول بسيط للغاية فالرقم ١ = ٢ أس صفر لذلك يكتب بالطريقة الثنائية ١ .

والرقم ٢=٢˙ أس ١ لذلك يكتب بالطريقة الثنائية (١٠)

والرقم ٣=٢˙ أس صفر و ٢أس ١ لذلك يكتب بالطريقة الثنائية (١١)

والرقم ٥=٢ أس صفر و ٢ أس ٢ لذلك يكتب بالطريقة الثنائية (١٠١)

حيث يوضع صفر تحت الرقم الخالى الذى لا يدخل فى الحساب ويوضع الرقم (١) تحت الرقم الذى يدخل فى الحساب .

تطبيق التحليل الثنائى على لعبة نيم :

لتطبيق طريقة التحليل الثنائى على الوضع الأول المكون من ٣، ٤، ٥ عملات نسجل عدد العملات فى كل صف كما يلى:

الصف	عدد العملات	العدد بالطريقة الثنائية
الأول	٣	١ ١
الثانى	٤	١ ٠ ٠
الثالث	٥	١ ٠ ١
		٢ ١ ٢ المجموع

وواضح أن مجموع أرقام العمود الأوسط هو واحد أى رقم فردى وهذا يعنى أن الوضع غير آمن ويمكن تحويل هذا الوضع إلى وضع آمن إذا أخذ اللاعب عملتين من الصف العلوى وعند ذلك يتحول الرقم الثنائى العلوى إلى ١ ويؤدى هذا إلى اختفاء الرقم الفردى من المجموع .

الصف	عدد العملات	العدد بالطريقة الثنائية
الأول	١	١
الثانى	٤	١ ٠ ٠
الثالث	٥	١ ٠ ١
		٢ ٠ ٢ المجموع

ويمكن للقارئ الذكى أن يعرف أن هذه الحركة (أى أخذ عملتين من الصف العلوى) هى الطريقة الوحيدة لتحويل الوضع الابتدائى غير الآمن إلى وضع آمن .

كمبيوتر ثنائى:

يمكن استخدام أصابع اليد اليسرى ككمبيوتر ثنائى ، لتحليل أى وضع بشرط ألا يزيد عدد العملات فى صف واحد عن ٣١ عملة، لنفرض أننا بدأنا اللعبة بصفوف تحتوى على ٧، ١٣، ٢٤، ٣٠ عملة، ولنفرض أنك اللاعب الأول وعليك أن تتبين ما إذا كان هذا الوضع آمنًا أو غير آمن .

افرد أصابع يدك اليسرى بحيث تتجه راحة اليد نحوك، واعتبر أصبع الإبهام يسجل عدد الوحدات فى عمود الـ ١٦ من الجدول السابق، وأصبع السبابة الواحدات فى عمود الـ ٨، أصبع الوسطى الوحدات فى عمود الـ ٤، وأصبع الخنصر الوحدات فى عمود الـ ٢، وأصبع البنصر الوحدات فى عمود الواحد .

ولإدخال العدد ٧ فى الكمبيوتر، عليك أن تثنى الوسطى والخنصر والبنصر، وبقى أن تغذى الكمبيوتر بالأرقام الباقية وهى ١٣، ٢٤، ٣٠ بنفس الطريقة السابقة إلا أنه إذا كان الأصبع منثنيًا فعليك بفرده حيث يعبر الأصبع المنثنى عن العدد (١) والمفرود عن الصفر .

ومهما كان عدد الصفوف فإنك إذا انتهيت من تغذية الكمبيوتر اليدوى، ووجدت جميع الأصابع مفرودة فإن هذا الوضع آمن. وهذا يعنى أن لعبتك ستؤدى إلى وضع غير آمن بكل تأكيد، وأنك سوف تخسر إذا كنت تلعب مع شخص يعرف عن لعبة نيم قدر ما تعرف .

وفى المثال السابق (٧، ١٣، ٢٤، ٣٠) فإنك عندما تنتهى من تغذية أرقام الصفوف الأربعة فى الكمبيوتر اليدوى فإنك سوف تجد أن أصبعين منثنيان، وهذا يدل على أن الوضع غير آمن، وأنك تستطيع أن تفوز إذا قمت بالحركة المناسبة.

جرب هذه الطريقة عدة مرات حتى تتقنها جيداً فتكون سبيلك إلى الفوز الدائم. كيف تفوز فى لعبة نيم (٧، ١٣، ٢٤، ٣٠) ؟!

والآن وقد علمت أن الوضع ٧ ـ ١٣ ـ ٢٤ ـ ٣٠ وضع غير آمن، فكيف يمكنك أن تجد الحركة التى تجعل الوضع آمنا ؟من الصعب تحديد ذلك بواسطة الأصابع، لذلك يفضل كتابة الأرقام بالطريقة الثنائية :

الصف	عدد العملات	العدد بالطريقة الثنائية
الأول	٧	١ ١ ١
الثانى	١٣	١ ١ ٠ ١
الثالث	٢٤	١ ١ ٠ ٠ ٠
الرابع	٣٠	١ ١ ١ ١ ٠
المجموع		٢ ٣ ٣ ٢ ٢

لاحظ الأعمدة ذات المجموع الفردى، إنهما العمودان الثالث والرابع فى أى صف يحتوى على واحـد فى أى من هذين العمودين يمكن تغيـره لتحويل الوضع إلى وضع آمن .

ونحن نذكر أن قواعـد اللعبة أخذ العمـلات من صف واحد، وعلى ذلك فإنه لتحـويل الوضع إلى وضع آمن فإنه يلزم أخذ ١٢ عـملة من الصف الثانى أو أربع من الصف الثالث أو ١٢ من الصف الرابع .

ومن المفيد أن تذكر أنك تستطيع أن تفـوز دائمًا إذا تركت صفين يحتوى كل منهما على نفس العدد من العملات .

ﬞﬞﬞ

تطبيقات أخرى لنظرية الأعداد الثنائية

البطاقات السحرية:

اقطع ٤ بطاقات من الورق المقوى وقسمهـا كما فى شكل (١) ثم اكتب فيها الأرقام المبينة .

بطاقة أ

١	٩
٣	١١
٥	١٣
٧	١٥

بطاقة ب

٢	١٠
٣	١١
٦	١٤
٧	١٥

بطاقة جـ

٤	١٢
٥	١٣
٦	١٤
٧	١٥

بطاقة د

٨	١٢
٩	١٣
١٠	١٤
١١	١٥

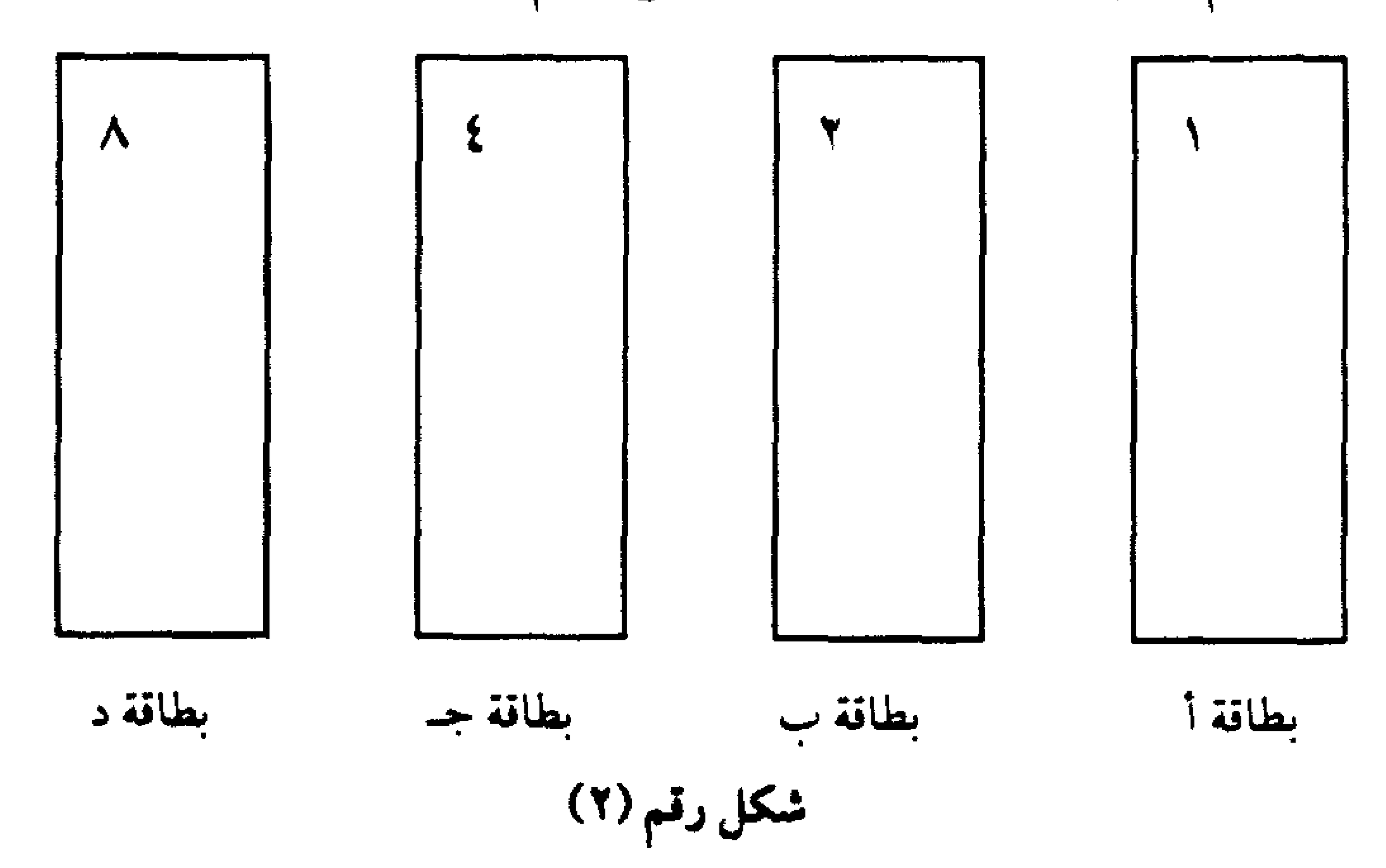
شكل رقم (١)

ولاستخـدام هذه البطاقات السحـرية، اطلب من صديقك أن يختار رقـماً من (١ ـ ١٥) ، ثم يبين البطاقة أو البطاقات التى تحتوى على هذا الرقم، فإذا كان هذا الرقم فى البطاقة رقم أ وحدها فـإن هذا الرقم هو (١)، أما إذا بيَّن لك صديقك أن الرقم الذى اختـاره يظهـر فى البطاقـات رقم أ، ب، جـ عندئذ اجمع الأرقـام التى توجد فى الركـن الأعلى الأيسر من كل هذه البطاقـات فتحـصل على الرقم الذى اختـاره صـديقك وهو ١ + ٢+ ٤ = ٧ ، أمـا إذا كـان الرقم الذى اختـاره صـديقك مـوجـودًا فى البطاقـة رقم ب ، د فـإن هذا الرقم هو ٢ +٨ = ١٠، وواضح أن مـا علينا هو جـمع الأرقام التى تظهـر فى الأركان العلوية اليـسرى فى البطاقـات التى يجد فيها صديقنا الرقم الذى اختاره .

إن سر هذه البطاقات السحرية يكمن فى طريقة كتابتها. فإذا اعتبرت كل بطاقة تمثل أساً للرقم ٢ (٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣). وبعبارة أخرى فإن كل بطاقة تمثل قيمة عشرية تساوى الرقم مرفوعًا إلى أس معين .

- فالبطاقة رقم أ تمثل القيمة ٢ أس صفر أى ١
- فالبطاقة رقم ب تمثل القيمة ٢ أس ١ أى ٢
- فالبطاقة رقم جـ تمثل القيمة ٢ أس ٢ أى ٤
- فالبطاقة رقم د تمثل القيمة ٢ أس ٣ أى ٨

ضع هذه القيم على البطاقات كما بشكل رقم (٢) التالى:



شكل رقم (٢)

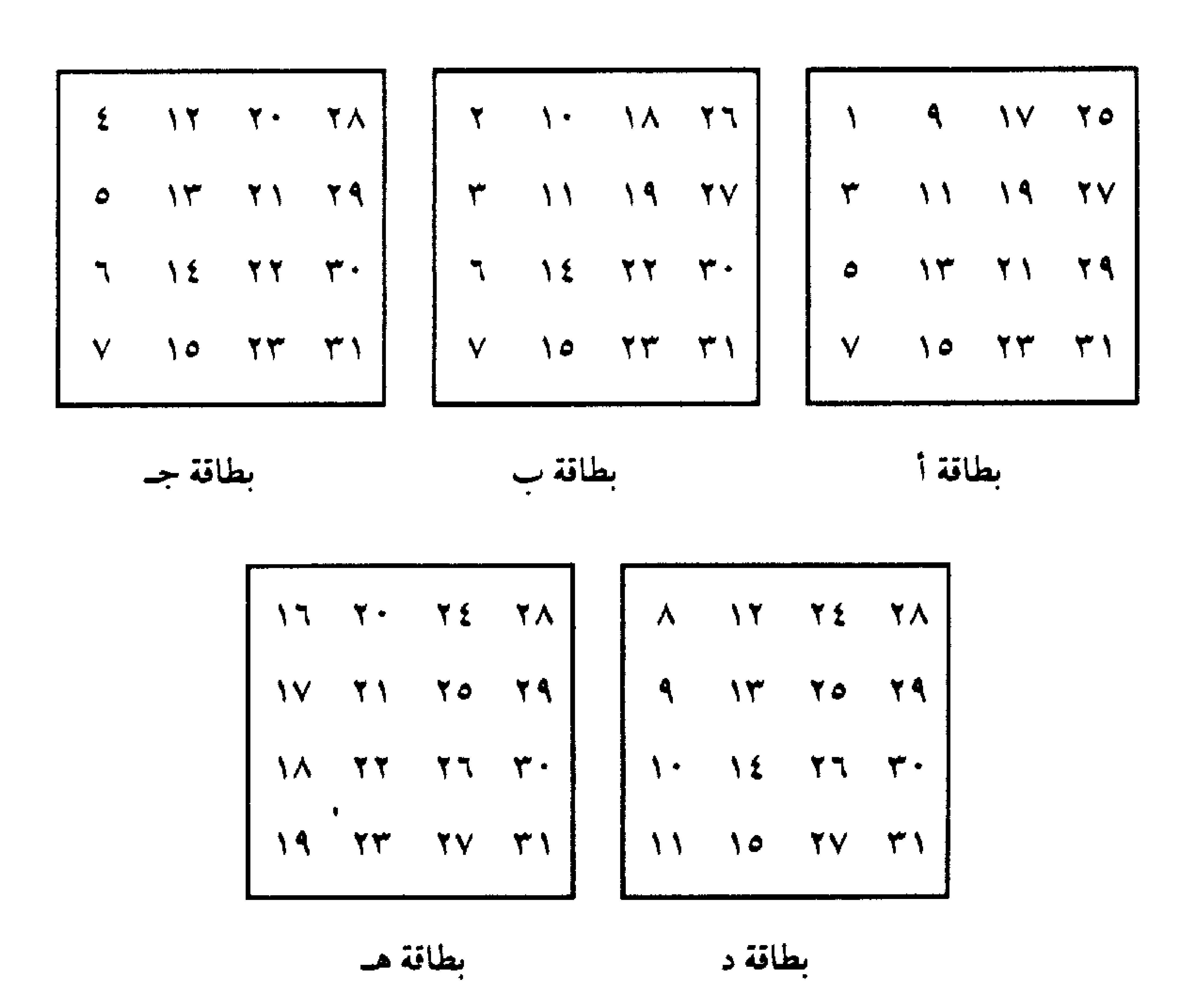
حول الأعداد من ١ إلى ١٥ إلى أعداد ثنائية من الجدول السابق للأعداد الثنائية، فإذا ظهر الرقم (١) فى الأعداد المحولة ، فإنه يجب أن يظهر أيضاً فى البطاقة السحرية. خذ مثلاً الرقم (٩) فإن حولناه إلى عدد ثنائى كانت النتيجة ١٠٠١، وعلى ذلك يجب أن يظهر الرقم (٩) فى البطاقة الأولى (البطاقة أ) وعلى البطاقة الرابعة (البطاقة د) أما الرقم عشرة فيقابله العدد الثنائى ١٠١٠ ، وعلى

ذلك فإن الرقم ١٠ يجب أن يظهـر فى البطاقة ب ، د ، أما الرقم ١١ فيـقابله العدد الثنائى ١١٠٠ ، وعلى ذلك فإن الرقم ١١ يجب أن يظهر فى البطاقة جـ ، د .

البطاقات السحرية الخمس :

المطلوب منك الآن، عزيزى القـارئ ، عمل خمس بطاقات سحـرية تحتوى كل منها على ١٦ عددًا، ويلاحظ أن الأعداد فى هذه الحالة تتراوح بين ١، ٣١ .

ابدأ بعمل جدول لتـحويل الأعداد العشرية إلى أعداد ثنائيـة ثم املأ البطاقات وجربها. وفيما يلى هذه البطاقات إذا تعثر عليك عملها بنفسك .



١	٩	١٧	٢٥
٣	١١	١٩	٢٧
٥	١٣	٢١	٢٩
٧	١٥	٢٣	٣١

بطاقة أ

٢	١٠	١٨	٢٦
٣	١١	١٩	٢٧
٦	١٤	٢٢	٣٠
٧	١٥	٢٣	٣١

بطاقة ب

٤	١٢	٢٠	٢٨
٥	١٣	٢١	٢٩
٦	١٤	٢٢	٣٠
٧	١٥	٢٣	٣١

بطاقة جـ

٨	١٢	٢٤	٢٨
٩	١٣	٢٥	٢٩
١٠	١٤	٢٦	٣٠
١١	١٥	٢٧	٣١

بطاقة د

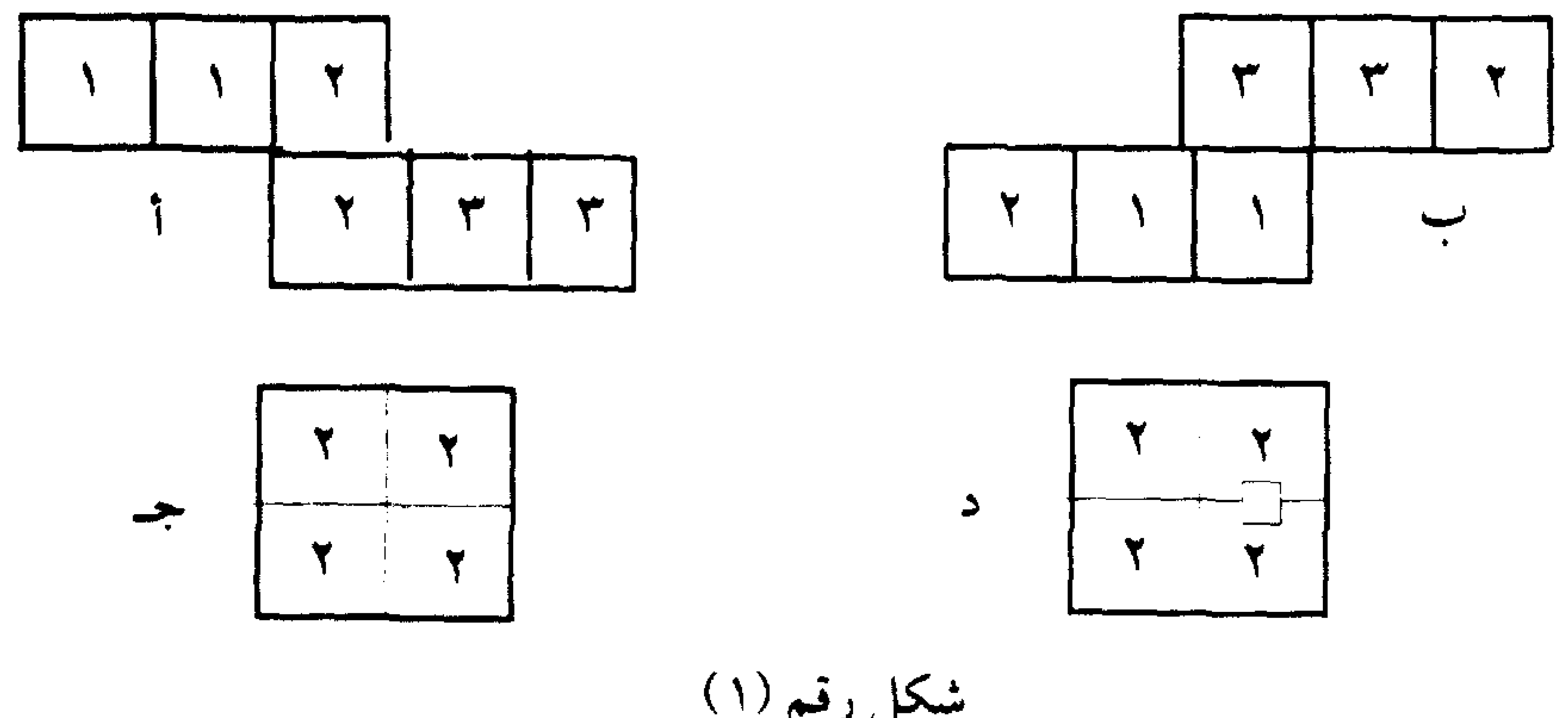
١٦	٢٠	٢٤	٢٨
١٧	٢١	٢٥	٢٩
١٨	٢٢	٢٦	٣٠
١٩	٢٣	٢٧	٣١

بطاقة هـ

تركيبات ورقية مسلية رباعية الجوانب

التركيبات الورقية الرباعية هى شرائط ورقية يمكن قلبها لتظهر أوجه جديدة مختلفة . أبسط تركيب رباعى: (التركيب الثلاثى الأوجه) .

تتكون أبسط التركيبات الرباعية من تركيب رباعى يطلق عليه ثلاثى الأوجه، يمكن طيه بسهولة من شريط من الورق كما فى شكل رقم (١) حيث يبين الشكل أوجه الشريط والشكل ب ظهر الشريط .



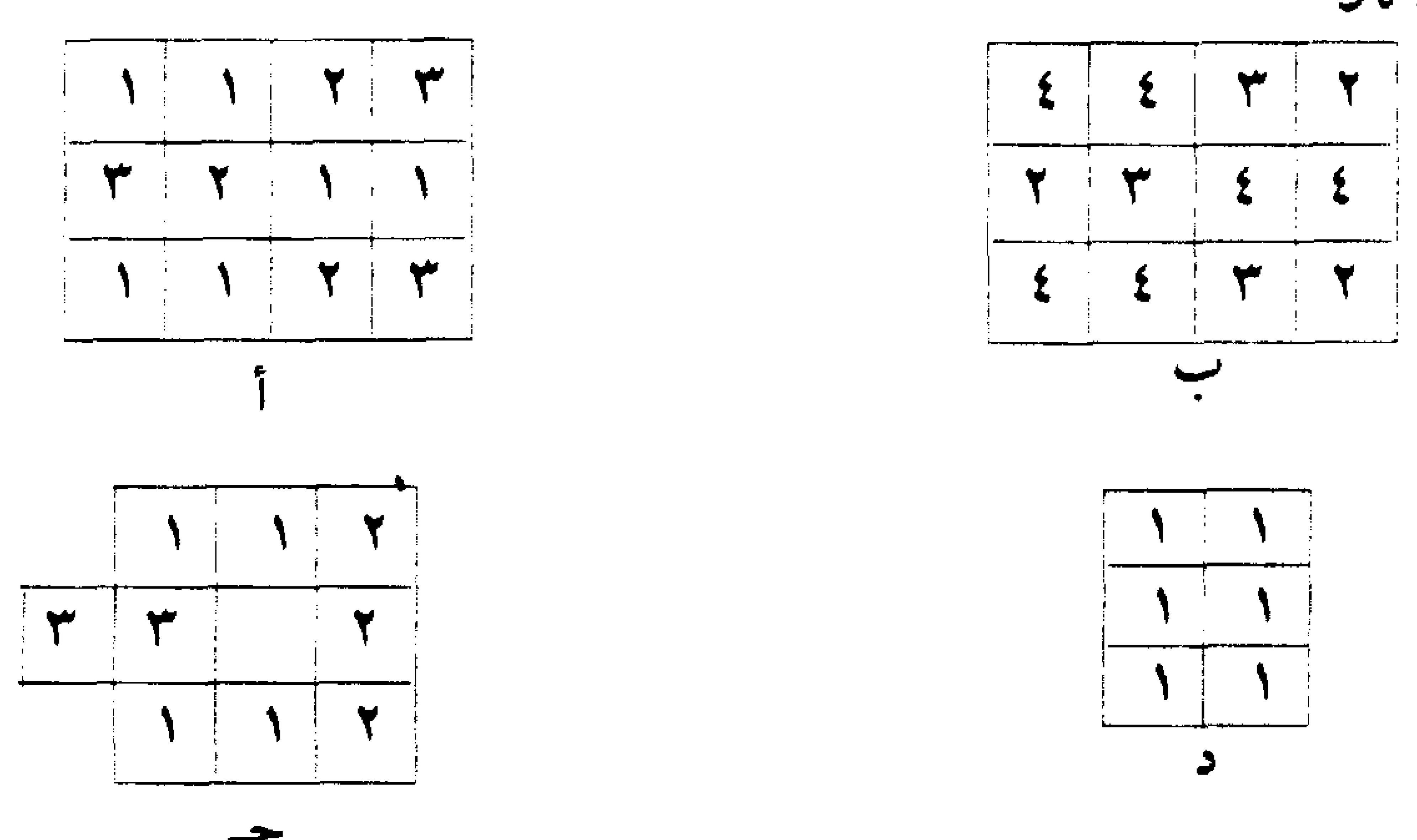
شكل رقم (١)
كيف تصنع التركيب الورقى ثلاثى الأوجه

اكتب أرقاماً فى المربعات الصغيرة كما هو مبين فى الشكل على كل من وجهى الشريط، ثم اطو الطرفين إلى الداخل (شكل أ ـ جـ) ، ثم الصق طرفين بشريط لاصق شفاف (شكل أ ـ د) . والآن نجد أن الوجه رقم (٢) إلى الأمام والوجه رقم (١) إلى الخلف ، ولقلب هذا التركيب، اطوه على طول الخط المركزى الرأسى من الوجه رقم (٢) وعند ذلك يطوى الوجه رقم (١) إلى الداخل فى حين يظهر الوجه رقم (٣) للعيان.

التركيب الرباعى الأوجه:

هناك على الأقل ستة أنواع من التركيبات رباعية الأوجه، ونحاول معًا صنع واحد منها، نبدأ بقطعة مستطيلة الشكل من الورقة مقسمة إلى ١٢ مربعًا . ثم رقِّم هذه المربعات كما هو مبين فى شكل رقم ٢ (٢ـ أ ، ٢ ـ ب).

اقطع المستطيل على طول الخطوط المتقاطعة ثم اطو المربعين المركزين إلى الخلف ثم إلى اليسار، ثم اطو العمود الموجود فى الطرف الأيمن وعند ذلك يبدو المستطيل كما فى شكل ٢ ـ جـ ، ثم اطو العمود الموجود فى الطرف الأيمن مرة أخرى ، ثم اطو المربع الذى يبرز ناحية اليسار ، إلى الأمام ثم إلى اليمين وعند ذلك تبدو لنا جميع المربعات التى بها الرقم ١ كما فى شكل (٢ ـ د). ثم ثبت أطراف المربعين المتوسطين بقطعة من الورق اللاصق الشفاف . وسوف تجد أنه من الأمور البسيطة إظهار الأوجه ١، ٢، ٣ أما الوجه رقم ٤ فإظهاره يحتاج إلى بعض المجهود .



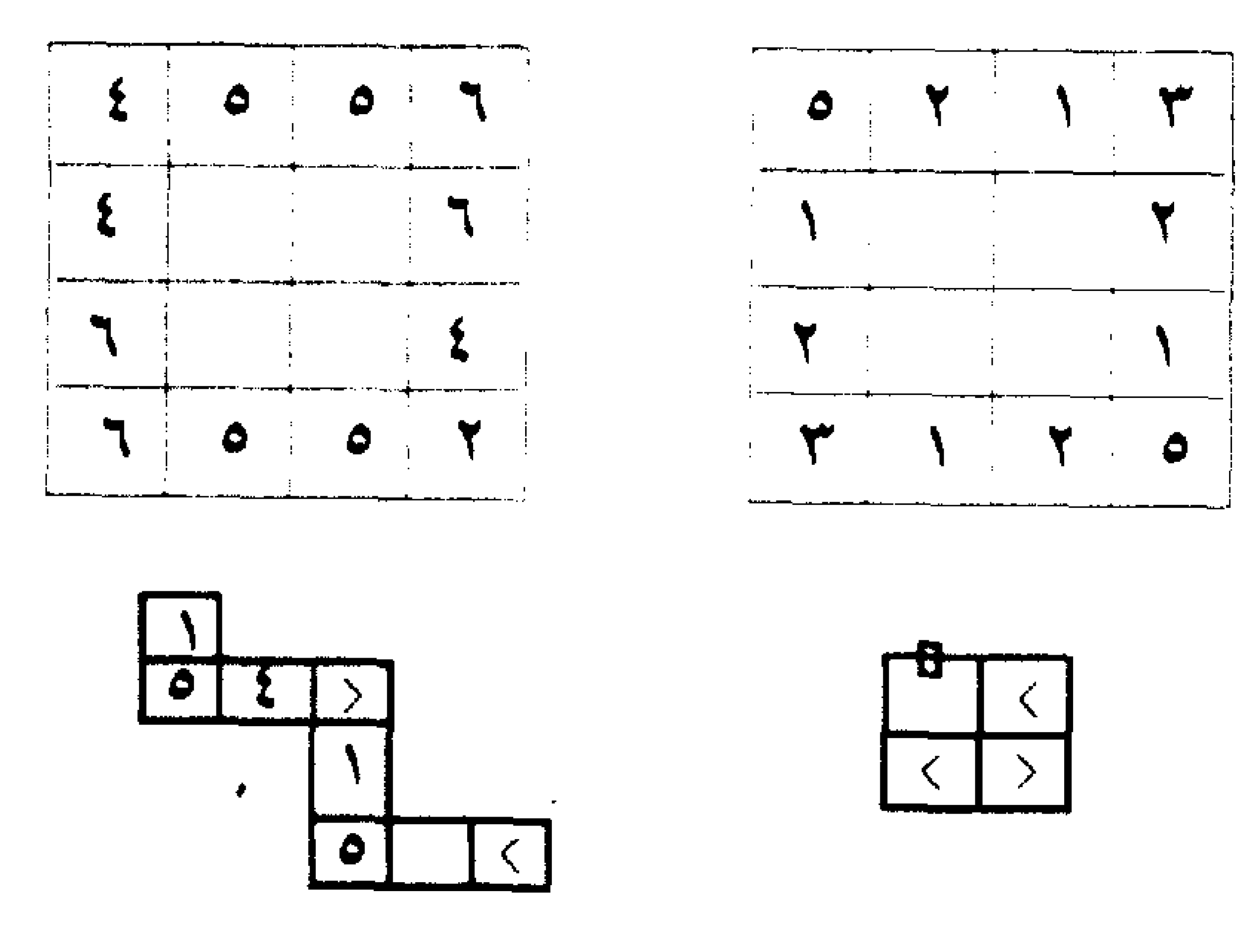
شكل رقم (٢) التركيب الورقى رباعى الأوجه

ويمكن عمل تركيبات رباعية من هذا النوع ولكن من درجة أعلى بدءاً من

نفس الشكل المستطيل ، إذا كان عدد الأوجه زوجياً أما إذا كان عدد الأوجه فردياً فإنه يجب استخدام نموذج مشـابه لذلك الذى استخدمناه فى حالة التركيب ثلاثى الأوجه .

الأنبوبة رباعية الأوجه:

تصنع هذه الأنبوبة من شريط من الورق يتكون من أربـعة مربعات (شكل رقم ٤) كل منها مـسطر إلى أربعة مـثلثات قـائمة الزاوية ، اثن الورقـة إلى الأمام وإلى الخلف على طول جـميع الخطوط ثم الصق طرفى الشريط لـتصنع أنبوبة مكعـبة، وتتلخص الصعوبة فى قلب داخل الأنبـوبة إلى الخارج عن طريق طى الورقة على الخطوط التى سبق ثنيها .



شكل رقم (٣) الأنبوبة رباعية الأوجه

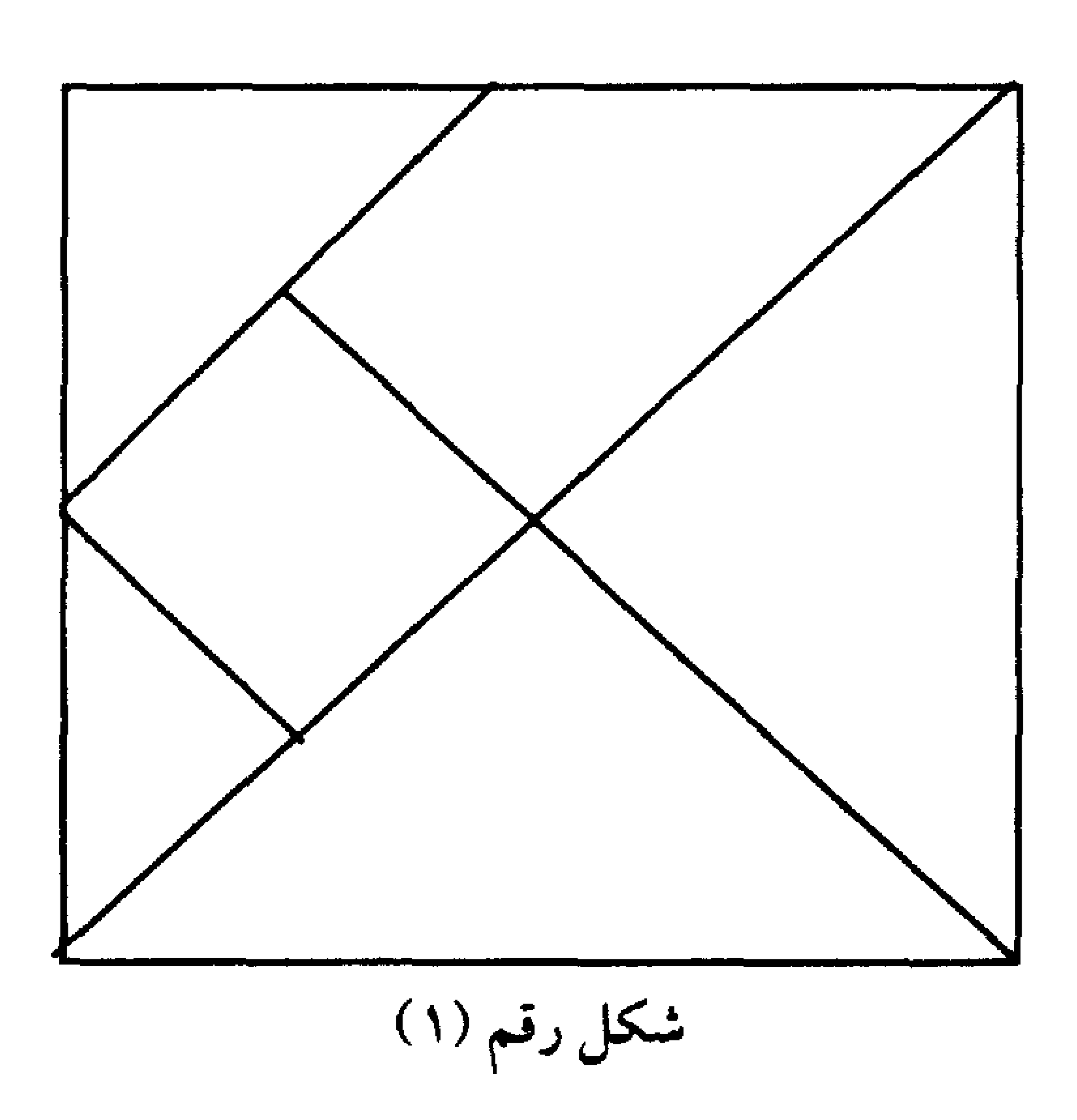
وهناك صورة أخـرى أكثر مـتانة يمكن صنعـها عن طريق لصق ١٦ مـثلثًا من الورق المقوى على شـريط قماش مع ترك فراغات بين المـثلثات حتى يمكن ثنى الشريط كـما يمكن تلويـن المثلثات بحيـث يمكنك أن ترى فى كل وقت مـقدار التقدم الذى أحرزته فى اتجاه قلب الأنبوبة .

ألغاز العباقرة (الألغاز الميكانيكية)

هذه المجموعة من الألغاز تختلف عن المـجموعات السابقة حيث أننا هنا لا نستخدم القلم والورق فى حل وعمل هذه الألغاز ، بل نستخدم أدوات خاصة مثل قطع الورق المقوى أو الخشب أو المعادن، وقـد يعجز البعض عن تقليدها بل قد يصبح من المستـحيل تقليدها، لذلك سميت هذه الألغاز «بالألغـاز الميكانيكية». والألغاز المـصنوعة من هذا النـوع ذات أهمية خـاصة من وجـهة النظر الرياضـية ولعل أكبر هذه المجـموعات هى تلك التى يمتلكها « مستـر جريمز» الذى يعيش فى ولاية نيويورك وتضم هذه المجموعة حوالى ٢٠٠٠ لغز بعضها نادر للغاية.

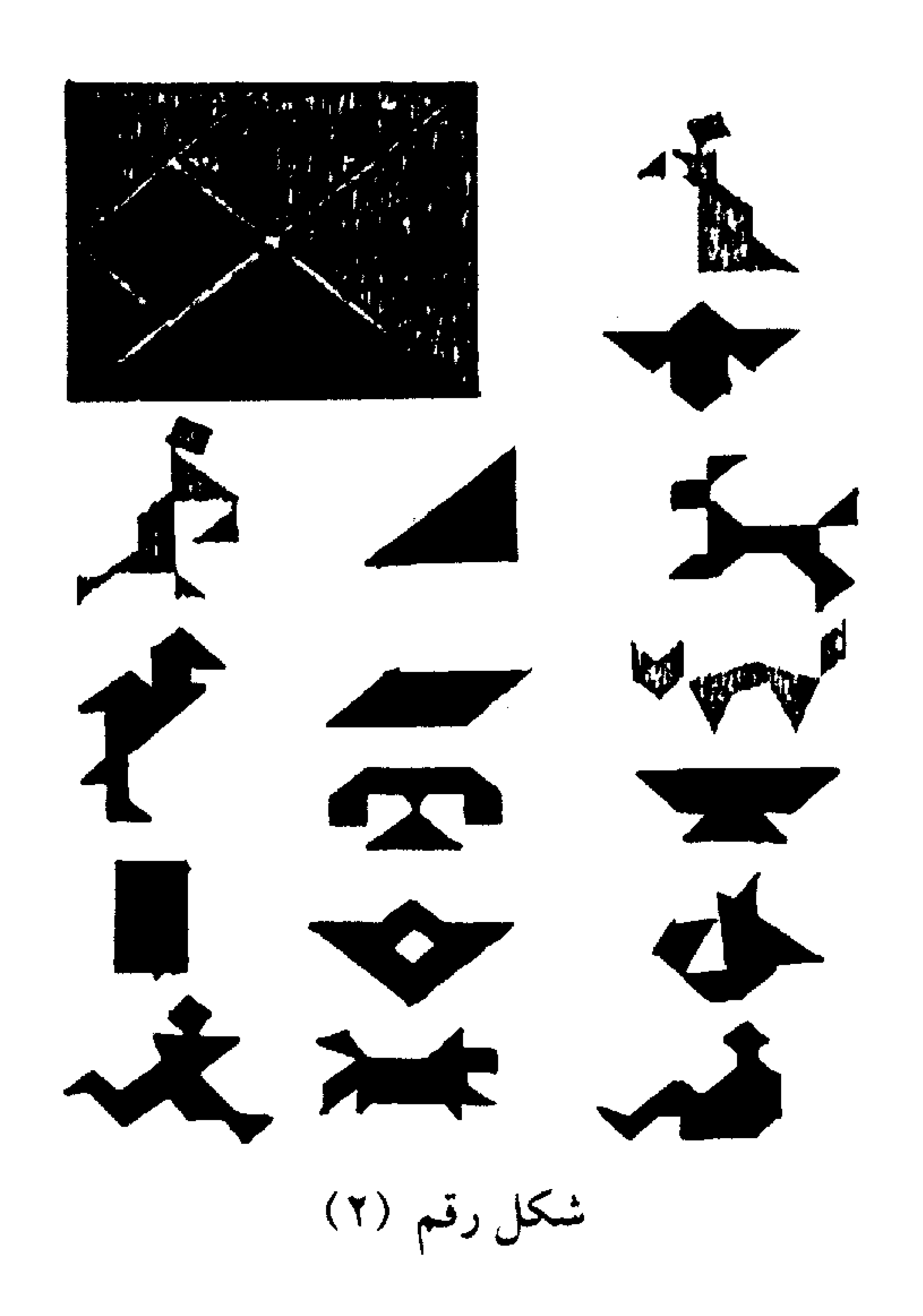
ألغاز تقسيم المربعات:

ظهرت هـذه الألغاز ، التى تشبه الألغاز المـيكانيكيـة، عند الإغريق القـدماء والرومان الذين كانوا يسلون أنفسهم بتقسيم مستطيل إلى ١٤ جزءاً، ويعزى هذا اللغز إلى أرشميدس .



شكل رقم (١)

طريقة تقسيم المربع على الخطوط القطرية والمتعامدة ليتكون لديك سبعة أجزاء هى التانات المستخدمة فى تكوين التانجرامات



شكل رقم (٢)

وليس عليك إلا أن تقسم مـربعًا من الورق المقـوى إلى مجمـوعة من القطع كما هو مـبين بالشكل رقم (١) ، ويطلق على هذه الأجزاء التى يبلغ عددها سـبعة أجــزاء اسم (التــانات) وعلى التــركــيــبــات المكـونة من هذه الأجــزاء اسم (التـانجرامـات) وعند تكوين التانجـرامات يجب اسـتخـدام الأجزاء السـبعـة فى التكوين مع ملاحظة تـلوين الجزء الذى على شكل متـوازى أضلاع بلونين ، لون من كل جهة حتى يمكن قلب الشكل أثناء الاستخدام .

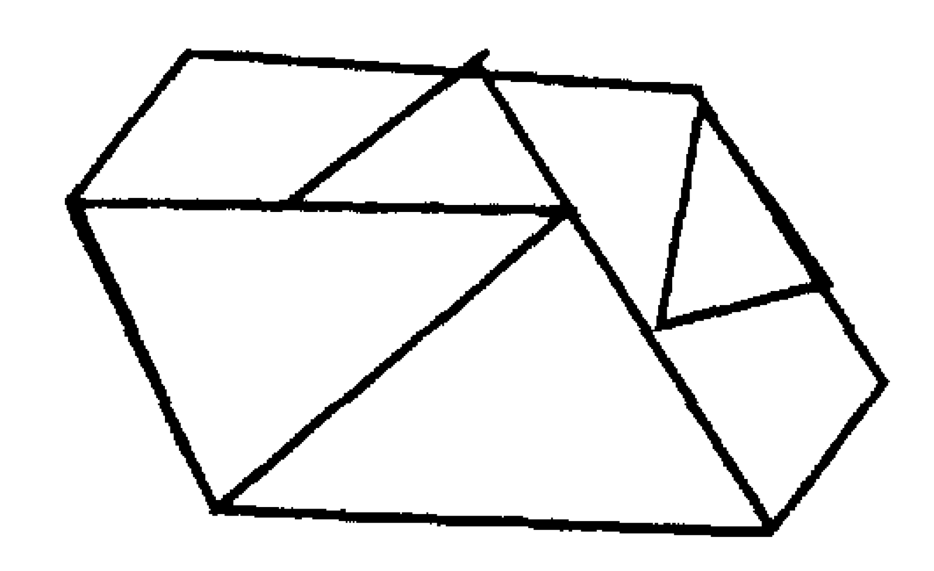
ويلاحظ أن النماذج الهندسية وحدها تحتاج إلى بعض الجهد فى حلها .

ويبين شكل رقم (٢) مجموعة من الأشكال التى يمكن تكوينها .

متعددات الأضلاع المحدبة:

كثيراً ما تؤدى ألغاز التقسيم البسيطة من هذا النوع إلى معضلات رياضية شديدة التعقيد .

فلنفرض مثلاً أننا نرغب فى إيجاد جميع متعددات الأضلاع المحدبة «أى متعددات أضلاع لا تحتوى على زوايا خارجية تقل عن ١٨٠ درجة » التى يمكن تكوينها من الأجزاء السبعة السالفة الذكر. ويمكن إيجاد هذه الأشكال باستخدام طريقة التجربة والخطأ. إن عالمين من علماء الرياضة الصينيين نشرا بحثًا عن هذا الموضوع عام ١٩٤٢ ووصفا طريقة عبقرية يمكن تقسيم الأجزاء السبعة سالفة الذكر إلى مثلثات قائمة الزاوية متساوية الساقين تنطبق مع الجزئين الصغيرين بحيث يمكن القول أن الأجزاء السبعة تتكون من ١٦ مثلثًا متطابقًا قائم الزاوية متساوى الساقين . وعن طريق سلسلة من المناقشات تمكن العالمان من تكوين ٢٠ شكلاً من الأشكال المحدبة متعددة الأضلاع وذلك باستخدام ١٦ مثلثًا من النوع المذكور، وعند ذلك يسهل إثبات أن ١٣ شكلاً من هذه الأشكال من نوع « التانجرامات». ومن بين هذه التانجرامات المحدبة الممكنة والتى يبلغ عددها ١٣ شكلاً، نجد أن واحدًا منها على شكل مثلث، وستة على شكل رباعيات الأضلاع، وأربعة سداسية الأضلاع. ويبين شكل رقم (٢) ثلاثة من الأشكال الرباعية، ومن هذه الأشكال ما هو سهل التكوين ومنها ما هو شديد الصعوبة فلا تيأس وحاول أكثر من مرة وسوف تصل إلى ما تريد بمزيد من الجهد والصبر .

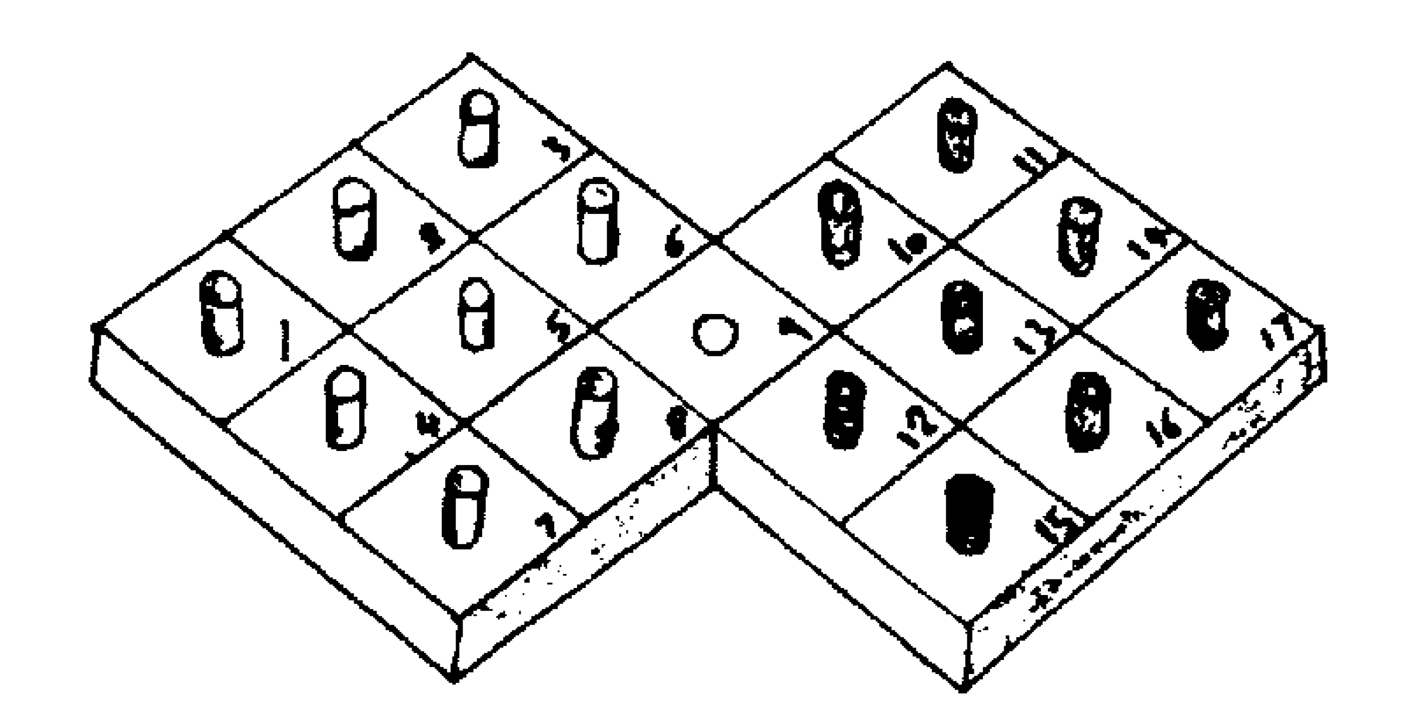


تانجرام سداسى الأضلاع

لغز الأوتاد المتحركة:

هناك نوع محبوب آخر من الألغاز الميكانيكية يتكون من عدد من الأقراص أو الأوتاد التى يجرى تحريكها على لوحة حسب قواعد معينة، ويبين شكل رقم (٣) واحدًا من هذه الألغاز، والأساس فى هذا اللغز هو إبدال أماكن الأوتاد البيضاء والسوداء بعدد أقل من النقلات وتكون الحركة من مربع إلى مربع مجاور خال، أو قفزاً فوق وتد مجاور إلى مربع خال ويمكن للوتد أن يقفز فوق وتد من نفس اللون أو من لون مخالف والحركات القطرية غير مسموح بها .

إن معظم كتب الألغاز تعطى حلاً من ٥٢ حركة بعدها يتم نقل الأوتاد السوداء مكان البيضاء . وقد تمكن خبير ألغاز إنجليزى من اكتشاف حل مكون من ٤٦ حركة، ويلاحظ أن اللوحة مرقمة لتسهيل تسجيل الحل . ويمكن لك صنع هذا اللغز باستخدام مربعين من الخشب، تركب كما بالشكل وتقسم وتوضع بها الأوتاد مع ملاحظة أن المربع الصغير الواصل بين المربعين الكبار يكون خاليًا، وأن العدد الكلى للأوتاد ١٦ وتدًا نصفها أسود ونصفها أبيض .



شكل (٣)

وإذا لم تتـمكن عزيـزى القارئ من إبدال الأوتاد فى حـدود العـدد المذكـور فإليك حل هذه المعضلة حيث سوف نذكـر أرقام المربعات الصغرى التى يجرى تحريك الوتد منها إلى الثقب الخالى، فمثلاً ، سـوف نذكر مثالاً صغيراً للإيضاح، فإذا كتبنا فى الحل ١٠ ـ ٨ ـ ٧، فـهذا يعنى نقل الوتد رقم ١٠ إلى المكان الخالى ونقل الـوتد رقم ٨ إلى المـكان الخـالى (وهـو رقم ١٠) ونقل الوتـد رقم ٧ إلى المكان الخالى (وهو رقم ٨) والحل يشمل ٤٦ حركة كما يلى :

١٠ ـ ٨ ـ ٧ ـ ٩ ـ ١٢ ـ ٦ ـ ٣ ـ ٩ ـ ١٥ـ ١٦ ـ ١٠ ـ ٨ ـ ٩ ـ ١١ ـ ١٤ ـ ١٢ـ
٦ ـ ٥ ـ ٨ ـ ٢ ـ ١ ـ ٧ ـ ٩ ـ ١١ ـ ١٧ ـ ١٦ ـ ١٠ ـ ١٣ ـ ١٢ ـ ٦ ـ ٤ ـ ٧ ـ ٩ ـ
١٠ ـ ٨ ـ ٢ ـ ٣ ـ ٩ ـ ١٥ ـ ١٢ ـ ٦ ـ ٩ ـ ١١ ـ ١٠ ـ ٨ ـ ٩ .

مسائل عبور النهر

من أعظم هذه الألغـاز إدهاشاً هو اللغـز الذى تعرفنا عليـه ونحن فى سنوات الدراسة المبكرة وهو اللغـز الخاص بالذئب والعنزة والكرنب وتجرى قصتـه كما يلى:

فقد طلب من مراكبى أن ينقل عبر النهر ذئبًا وعنزة وكرنبًا إلى الشاطئ الآخر، إلا أن مركبـه صغير لا يتـسع إلا لحمل اثنين فقط هو وواحد غـيره وهو الذئب أو العنزة أو الكرنب وليس أكثـر من ذلك فكيف يمكن إتمام المهـمة دون أن تحدث أية خـسائر، وكـانت العنزة هى أكـثر المـسافـرين إقلاقـاً للراحـة من وجهـة نظر المـراكبى لأنه إذا بدأ الرجل فى نقل سلة الـكرنب وترك الذئب مع العنزة فعنـدما يعود سـيكون الذئب قد أكل الـعنزة وإذا بدأ بالذئب فعندمـا يعود سـوف يجد أن العنزة قد أكلت الكرنب .

ويعتقد أن أول من فكر فى هذا اللغـز هو مرب إنجليزى ورجل دين عاش فى بلاط الملك شارلمان .

وأبسط طريقة للحل بل هى الطريقة الوحيدة فى الحقيقة، هى أن يأخذ الرجل العنزة فى البـداية، ولكن من هـو التالـى؟ هل يأخذ الـذئب أو الكرنـب ، وفى هذه الحالة يقع فى نفس المحظور كما كان من قبل، وبمرور الوقت عليه أن يرجع إلى البند الثالـث من حمولتـه، وعند ذلك ظهرت فكرة لامعـة، فنقل الذئب كحـمولة ثابتـة وعاد بالعنزة للشـاطئ الأول وتركهـا هناك، ونقل سلة الكرنـب ثم عـاد فنقل العنزة وانتهى الأمر .

ومن هذا اللغز نشأت ألغاز أخرى تحمل نفس الفكـرة، حيث يوجد مجموعة من الجنود يريدون عبـور النهر فوجدوا قاربًا فـيه ولدان ، وكل من الولدين يمكن أن يقـود القـارب ولكن القـارب صغيـر جـداً ولا يمكنه أن ينقل غيـر جندى أو الولدين معًا على الأغلب، وقد عبر الجنود، فكيف تم ذلك ؟!

ومن المسائل الأخرى المشابهة نجد أسرة مكونة من أربعة أفراد وكلب وكان وزن الأب والأم ١٦٠ ك .ج وكلاً من الطفلين حوالى ٨٠ ك . ج، والكلب حوالى ١٢ ك . ج ، وكان عليـهم أن يعبـروا النهر فى قـارب لا يمكنه أن يحمل أكـثر من ١٦٠ ك . ج وكان أحد الطفلين ولداً ذكياً يعرف مسألة الذئب والعنزة والكرنب ، فوجـد طريقاً للخـروج من هذا المأزق دون أن يخـطر ببال الأب أن يقـذف بأحد الطفلين فى النهر .

ومن المسائل المشابهة البسـيطة أن هناك زوجين غيورين وزوجتاهما يريدون عبـور النهر فـى قارب لا يتسـع لغيـر اثنين ، فكيف يمكن أن تقوم بهـذه العملـية بحيث لا تترك زوجة مع الزوج الآخر إلا إذا كان زوجها موجوداً. وسوف ترى أن الحل بسيط ويحتاج العبور إلى خمسة خطوات .

إلا أن المســألة تصبـح أكثر تعـقيـداً إذا كان هناك ثلاثـة أزواج وكـيف يكون الحل ؟ وحتى لا تقع فى حيرة فسوف نبحث هـذا الحل معاً بالطريقة الآتية : تعبر اثنتان من الزوجـات الثلاث وتعود إحداهما ، ونـأخذ الزوجة الثالثة وعـندما تعود إحداهن تبقى مع زوجـها، ويعبر الزوجان إلى زوجـيتهما ثم يعـودالزوج وزوجته وتبـقى الزوجة ويعـبر الزوجـان وتعـود الزوجة الوحـيدة لتـحضـر معـها إحـدى الزوجـات ثم تعـود ثانية لإحـضـار الزوجـة الثالثـة ثم يعـبـر زوج المرأة الـثالثـة لإحضارها معه .

وحتى يصبح الحل أكثر وضوحاً سوف نقوم بعمل الجدول التالى حيث ترمز للأزواج بالحـــروف أ ـ ب ـ ج، والزوجـــات س ـ ص ـ ع على التـــرتيب أى أن الزوج أ هو زوج المرأة س وهكذا .

الشاطئ الأول		الشاطئ الثانى
الأفراد الموجودون أ ـ ب ـ جـ ـ س ـ ص ـ ع		
١ - أ ـ ب ـ جـ ـ س	عبور ص ، ع ←	ص ـ ع
٢ـ أ ـ ب ـ جـ ـ س ـ ص	عودة ص →	ع
٣ - أ ـ ب ـ جـ	عبور س ، ص ←	س ـ ص ـ ع
٤ - أ ـ ب ـ جـ ـ س	عودة س →	ص ـ ع
٥ - أ ـ س	عبور ب ، جـ ←	ب ـ جـ ـ ص ـ ع
٦ - أ ـ ب ـ س ـ ص	عودة ب ، ص →	جـ ـ ع
٧- س ـ ص	عبور أ ، ب ←	أ ـ ب ـ جـ ـ ع
٨- س ـ ص ـ ع	عودة ع →	أ ـ ب ـ جـ
٩- ع	عبور س، ص ←	أ ـ ب ـ جـ ـ س ـ ص
١٠ - جـ - ع	عودة جـ →	أ ـ ب ـ ص ـ س
١١- - - -	عبور جـ ، ع ←	أ ـ ب ـ جـ ـ س ـ ص ـ ع

وبعد هذا الجهد الكبير الذى بذل من أجل نقل الأزاوج والزوجات من جانب النهر إلى الجانب تحت الشروط السابقة والتى ازدادت تعقيداً بسبب صغر حجم المركب، كان يمكن نقل الأزاوج والزوجات بأقل قدر من الجهد إذا انتظروا وصول مركب كبير يسع الجميع، ولكن لوحدث هذا ما كان سيصبح لدينا مسألة نحاول حلها .

ولكن فى ضوء الشروط السابقة لعبور الأزواج والزوجات فهل يمكن حل هذه المسألة لو كان عدد الأزواج أربعة والزوجات طبعاً أربع ؟

إذا حاولت حل هذه المعضلة ووصلت إلى حل، فلابد أن يكون حلك خاطئاً! وهذا ليس إقلالاً من قدرتك ولكن من حاول حل هذه المسألة ومنهم العالم الرياضى الإيطالى (تارتليا) فى القرن السادس عشر الذى وجد حلاً إلا أنه كان حلاً خاطئاً ، فقد يقع الرياضيون الكبار أيضاً فى أخطاء، والسر فى هذا الحل الخاطئ أن هذه المسألة بأربعة أزواج وزوجات ليس لها حل ولكن يمكنك حلها بعدد خمسة أزواج وبقارب يسع لثلاثة أزواج ، ولكن ليس لستة أزواج أو أكثر .

◻◻◻

ألغاز الصب

« طريقة الإنسان الآلى »

وهناك طراز آخر من المسائل التى كنا نتباهى بمعرفتها، ومنها الآتى :

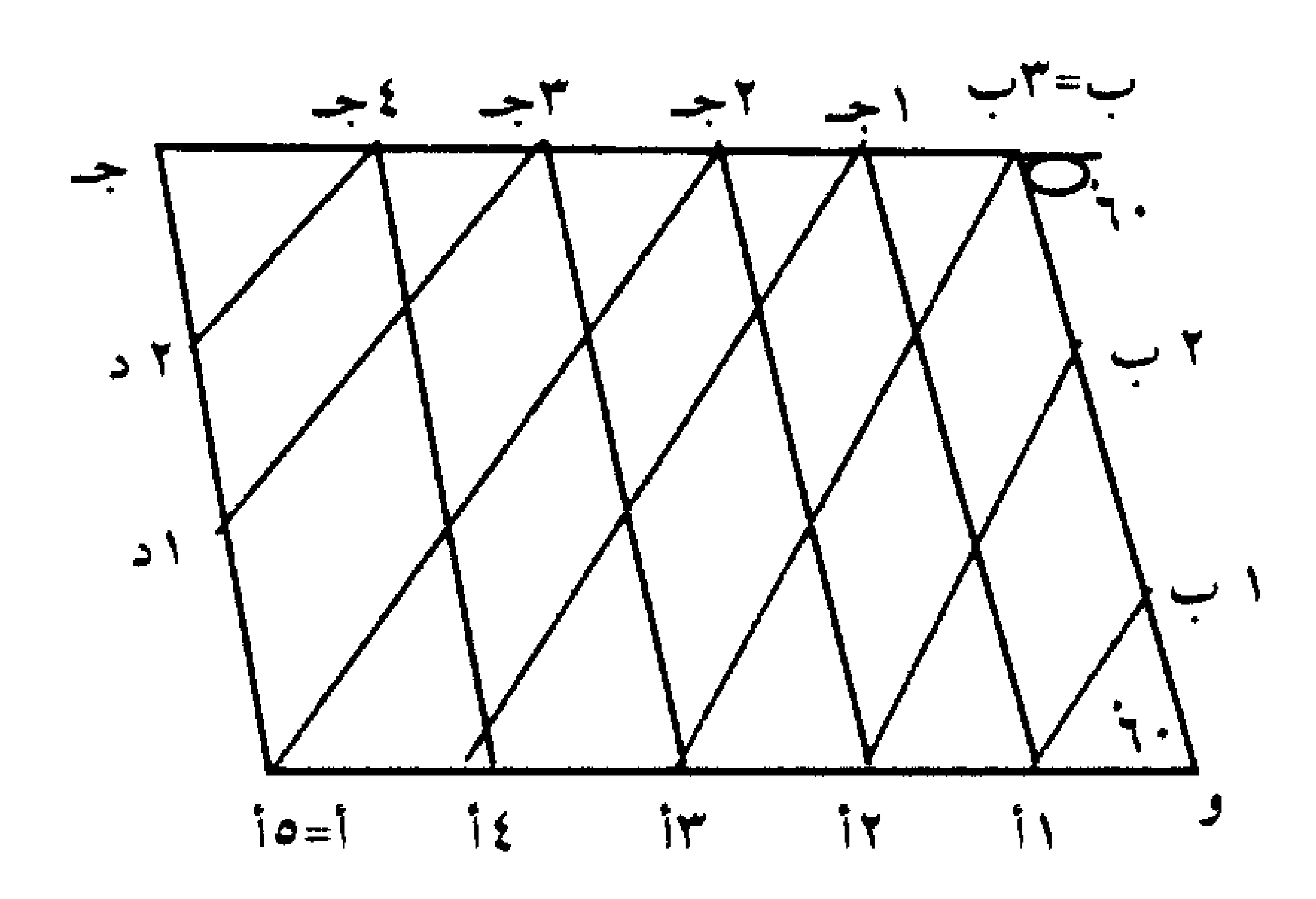
وعاء من اللبن سعة ٨ لترات، يراد تقسيمه إلى قسمين متساويين باستخدام الوعاء نفسه ووعائين آخرين خاليين سعتهما ٥ ، ٣ لترات على التوالى.

وهذا اللغز من الألغاز القديمة جداً ، ومن الصعب القول بالضبط متى عرف، ويمكن الوصول إلى الحل بالتجربة والخطأ، ويمكن اختزال عدد المحاولات اللازمة بدرجة لا بأس بها لو استخدمت الطريقة التالية .

الوعاء	مقدار اللبن فى كل وعاء عند كل مرحلة								
المراحل	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
وعاء به ٨ لترات	٨	٥	٥	٢	٢	٧	٧	٤	٤
وعاء سعة ٥ لترات	٠	٠	٣	٣	٥	٠	١	١	٤
وعاء سعة ٣ لترات	٠	٣	٠	٣	١	١	٠	٣	٠

وقد ناقش عدد كبير من العلماء طريقة حل هذا النوع من الألغاز إلى أن تمكن الرياضى الروسى (برلمان) من الوصول إلى طريقة يقوم بالعمل فيها إنسان آلى عبارة عن كرة صغيرة ، وهذه الكرة تقوم برحلة قصيرة على مائدة البلياردو على صورة غير عادية، على صورة متوازى أضلاع إحدى زواياه ٦٠°، وطريقة العمل كالآتى :

لكى نحل المسألة (٨ ـ ٥ ـ ٣) بالأوانى الثلاث، نأخذ أ = ٥، ب = ٣ ، جـ = ٨ وننشئ متوازى الأضلاع الذى ضلعاه و أ = ٥ ، د ب = ٣ والزاوية بينهما ٦٠°م كما بالشكل .



وتبدأ الكرة رحلتـها فوق مـائدة البلياردو مـتبعة قـانون الانعكاس الذى ينص على أن زاوية السقوط تساوى زاوية الانعكاس .

ولنفرض أن الكرة بدأت رحلتها من النقطة «و» على المستقيم «و ب» فسوف تصل إلى النقطة « ب» أولاً ، ومن هناك تطيع قانون الانعكاس فـتصل إلى النقطـة « ٣أ»؛ لأن الزاوية بين «وب» وامـتـداد «ب جـ» تسـاوى ٦٠°م وهذا المـسـتقـيم ينطبق على قطر المـعين الصغـير المجـاور للمسـتقيـمين وب ، ب جـ ؛ لأن هذا القطر ينصِّف الزاوية بـ^ التى تـساوى ١٢٠°، ومن النقطة ٣ أ تصـل الكرة بنفس القاعدة إلى النقطة ٣ جـ ، ١د ، ١ب ، ١أ، ١جـ ، ٤أ على الترتيب .

والآن لنترك الكرة تستريح بعض الوقت عـند النقطة ٤أ ونسأل أنفسنا ما دخل هذه الرحلة فى موضوع الصب الذى نحن بصدده ؟ والإجابة عن هذا السؤال دعنا نفحـص محل كل نقطة وصلت إليـها الكرة بالنسـبة للخـطين الأساسـيين «وأ» ، «وب» وللوصول إلى النقطة ٣ جـ مثلاً فإننا نصل إليها من «و» بأن نسير على «وأ» عـدد ٣ وحدات للـنقطة ٣ أ ونسيـر على الخط الـموازى إلى «وب» ٣ وحـدات، ولنسجل هـذه النتيجـة فى الصورة ٣ جـ (٣، ٣) والتى تسـمى فى لغة الرياضـيين بإحداثى النقطة ٣جـ بالنسبة للمستقيمين الأساسيين و أ، وب .

ولنكتب الآن النقط المـتتالية لـلكرة بإحداثيتـها، وعلى ذلك تكون ٣ ب (٠، ٣) ـ ٣أ (٣، ٠) ـ ٣جـ (٣، ٣) ـ ١د (٥ـ١) ـ ١ب (٠، ١) ـ ١أ (١، ٠) ـ ١جـ (١، ٣) ـ ٤أ (٤، ٠) .

والآن نحن مستعدون لعملية الصب، فالعددان على جانب النقطة ٣ ب وهما (٠، ٣) تعنى أن الإناء أ يكون به «صفر» أى فارغ وبالإناء « ب» ٣ لترات والنقطة ٣أ (٣، ٠) تعنى أن الإناء أ به ٣ لترات والإناء ب به صفر ، والنقطة ٣ جـ (٣، ٣) تعنى أن الإناءأ، ب بكل منهما ٣ لترات وهكذا .

ولو أتعب القارئ نفـسه فى مقـارنة جدول الحل الأول بالأعـداد التى حصلنا عليـها مـن طريقة الإنسـان الآلى بالكرة لوجـد أن الأعـداد متطـابقة ، ولو حـاول القارئ أن يسلى نفـسه بأن تبدأ الكرة الحـركة على الخط المسـتقيم «وأ» فـسوف يجـد مـفـاجأة أخـرى وهى أنه سـوف يصل إلى حل آخـر لهـذه المسـألة وهو:

المراحل	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
وعاء به ٨ لترات	٨	٣	٣	٦	٦	١	١	٤
وعاء سعة ٥ لترات	٠	٥	٢	٢	٠	٥	٤	٤
وعاء سعة ٣ لترات	٠	٠	٣	٠	٢	٢	٣	٠

ومن المفيد أن نلاحظ أن الكرة فى رحلتها تحركت على نوعين :

١ ـ مستقيمات توازى الخطين الأساسيين «وأ» ، «وب» .

٢ ـ أقطار المعينات الصغيرة التى تنصف الزوايا ذات الدرجة ١٢٠ .

وكقاعدة عامة، تتبع الكرة بالتبادل هذين النوعين من المستقيمات ، وأن حساب إحداثيات النقطة يكون كالآتى :

أـ يحسب بعد النقطة التى تصل إليها الكرة عن المستقيم وأ ، عن المستقيم وب .

ب ـ يكتب البعد عن المستقيم «وب» أولاً ثم عن المستقيم «وأ».

جـ ـ إذا وقعت الكرة فوق المستقيم «وب» يكون إحداثى النقطة الأولى صفر

ء ـ إذا وقعت الكرة فوق المستقيم «وأ» يكون إحداثى النقطة الثانية صفر.

كما فى النقطة «أب» التى إحداثيها (٠، ١) والنقطة ٣ أ التى إحداثيها (٣، ٠) ويجب ملاحظة أن الكرة قادرة على إيجاد حلين لكل مسألة، الأول عندما ترسل على المحور «وأ» والثانى عندما ترسل على المحور «وب» .

ويمكن للقارئ أن يحاول حل المسألة : أ =٧ ، ب = ٥ ، جـ = ١٢ والمسألة أ= ٩ ، ب = ٧ ، جـ = ١٦ .

مسألة العملة الزائفة

من المسائل الكثيرة التى وصلت إلينا من التراث الماضى والتى يبدو فيها الذكاء والنبوغ هذه المسألة التى تقول : عندك ٨ عملات متشابهة وميزان، وأحد هذه العملات زائفة وبالتالى فهى خفيفة الوزن. فكيف يمكنك أن تعين هذه العملة مستخدماً الميزان مرتين فقط.

والصعوبة هنا فى أنه لابد من القيام بوزنتين فقط، والحل أن تزن ثلاث عملات فى كفة الميزان وثلاث أخرى فى الكفة الثانية، فلو اتزنتا فزن العملتين الباقيتين إحداهما مقابل الأخرى ، فالعملة الأخف هى العملة الزائفة .

أما إذا لم تتزن المجموعتان الأوليتان فأخف المجموعتين هى التى تحتوى على العملة الزائفة، وبالتالى فعليك وزن أية اثنتين منهما كل ضد الأخرى، فإن لم تتزن، فالأخف هى العملة الزائفة وإذا اتزنتا، فالعملة الباقية هى الزائفة.

مسألة أكثر شمولاً :

فى هذه المسألة نسأل كيف تتوازن عملات على ميزان عدد ١٢ عملة متساوية ظاهرياً مع العلم أن إحدى هذه العملات تختلف فى الوزن من الـ ١١ عملةالأخرى دون أن تعرف هل هذه العملة أثقل من العملات الأخرى أم أنها أخف وزناً ؟

ولتسهيل الحل يحب أن تتذكر أن هناك عملة واحدة مختلفة ، كما أنه عليك أن ترقم العملات بالأرقام من ١ إلى ١٢ .

ولنبدأ بوضع أربع عملات ولتكن مثلاً ١ ، ٢، ٣، ٤ فى إحدى كفتى الميزان

ونضع أربعة أخرى ولتكن ٥، ٦، ٧، ٨ فى الكفة الأخرى ومن هذا الوزن نجد أحد أمرين :

(أ) ١، ٢، ٣، ٤ تساوى = ٥، ٦، ٧، ٨

(ب) ١، ٢، ٣، ٤ لا تساوى ≠ ٥، ٦، ٧، ٨

ففى الحالة الأولى تكون جميع العملات طبيعية وتكون العملة الزائفة هى إحدى العملات ٩، ١٠، ١١، ١٢ . والآن ضع أى ثلاث عملات من هذه العملات الأخيرة ولتكن مثلاً ٩، ١٠، ١١ فى إحدى كفتى الميزان وضع أى ثلاث عملات أخرى من العملات التى عرفنا أنها طبيعية مثلاً ١، ٢، ٣ فى الكفة الأخرى ، ومن هذه الوزنة الثانية نجد أحد أمرين :

(أ) ١، ٢، ٣ = ٩، ١٠، ١١

أو (ب) ١، ٢، ٣ أ ≠ ٩، ١٠، ١١

ففى الحالة (أ) تكون العملة رقم ١٢ هى العملة الزائفة، وبوزن العملة رقم ١٢ ضد أى عملة أخرى يتبين لنا هل هى أقل أو أكثر من المعتاد .

وفى الحالة (ب) تكون إحدى العملات ٩، ١٠، ١١ هى الزائفة وتكون أخف أو أكثر ثقلاً إذا كانت ٩، ١٠، ١١ أخف أو أثقل من ١، ٢، ٣ ولتعيين العملة الزائفة تزن أى اثنتين مقابل بعضهما ولتكن ٩، ١٠ فلو كانت ٩ = ١٠ فإن العملة الزائفة هى رقم ١١ ونحن نعرف من الوزن السابق إذا كانت أخف أو أثقل .

وإذا كانت ٩ ≠ ١٠ كانت إحداهما هى العملة الزائفة .

وبهذا نكون قد انتهينا من مناقشة الحالة الأولى ، ولنرجع إلى الحالة الثانية فنلاحظ فى الوضع الأول أن العملة الزائفة على الميزان وتكون العملات ٩ ـ ١٠ ـ ١١ ـ ١٢ طبيعية، وزيادة على ذلك تكون أية عملة من العملات ١ ـ ٢ ـ ٣ ـ ٤ إما طبيعية وإما ثقيلة ولكن لا يوجد بينها عملة خفيفة ، فى حين أن أى عملة من العملات ٥ ـ ٦ ـ ٧ ـ ٨ هى إما طبيعية وإما خفيفة ولكن لا يوجد بينها عملات ثقيلة .

وللوزنة الثانية نضع فى إحدى الكفتين أية ثلاث عملات طبيعية مثل ٩ ـ ١٠ ـ ١١ وأضف إليها واحدة قد تكون خفيفة، ولتكن العملة رقم ٥ ونضع فى الكفة الأخرى اثنتين من الممكن أن تكونا ثقيلتين ولتكن ٣ ـ ٤ ، ونضيف إليهما اثنتين من العملات الثلاث التى قد تكون خفيفة مثل ٦ ـ ٧ ومن هذه الوزنة ينتج ثلاث إمكانات :

أ ـ ٩ ـ ١٠ ـ ١١ ـ ٥ = ٣ ـ ٤ ـ ٦ ـ ٧

ب ـ ٩ ـ ١٠ ـ ١١ ـ ٥ أكبر من ٣ ـ ٤ ـ ٦ ـ ٧

جـ ـ ٩ ـ ١٠ ـ ١١ ـ ٥ أصغر من ٣ ـ ٤ ـ ٦ ـ ٧

ففى الحالة «أ» تكون جميع العملات فى الميزان طبيعية وكذلك العملة رقم ١٢ . ويمكن أن تكون ٨ خفيفة أو إحدى ١، ٢ ثقيلة . ولتقرير النتيجة نضع العملتين الأخيرتين على كفتى الميزان وينتج من هذه الوزنة إحدى حالتين :

إما ١ = ٢ وعند ذلك تكون العملة ٨ خفيفة

وإما ١ ≠ ٢ وعند ذلك تكون الثقيلة من الاثنتين هى الزائدة فى الوزن .

فى الحالة «ب» تبين الوزنة الثانية أن العملة ٥ لابد أن تكون طبيعية وأن إحدى الوزنتين الخفيفتين الباقيتين هى العملة الزائفة ، ويتكرر الوضع بوضع العملتان فى كفتى الميزان (الوزنة الثالثة) وتكون أخف الاثنين هى العملة الزائفة.

وفى الحالة «جـ» يمكن أن تعرف أن العملة «٥» خفيفة فعلياً وأن واحدة من ٣ أو ٤ تكون زائدة فى الوزن، فلو تعادلا فى الوزن كانت «٥» خفيفة وإذا لم يتعادلا كانت الأثقل هى المطلوبة .

وحتى تتضح العمليات السابقة فسوف نستعرضها ملخصة فى الجدول التالى:

الوزن الأول	الوزن الثانى	الوزن الثالث
١-٢-٣-٤=٥-٦-٧-٨	١-٢-٣=٩-١٠-١١	١٢
	١-٢-٣ =٩-١٠-١١ ، ٩ = ١٠ ، ٩ ≠ ١١	١١
	أ-٩-١٠-١١-٥=٣-٤،٦-٧	
	أى أن ١ = ٢	العملة ٨ خفيفة
	أو ١ ≠ ٢	الأثقل هى العملة الزائفة
	ب ـ ٩-١٠-١١-٥ ≠ ٣-٤-٦-٧	
١-٢-٣-٤ ≠ ٥- ٦-٧-٨	أى أن ٦=٧	العملة ٨ خفيفة
	أو ٦ ≠٧	الأخف هى العملة الزائفة
	جـ ـ ٩-١٠-١١-٥ = ٣-٤-٦-٧	
	أى أن ٣ = ٤	العملة ٥ خفيفة
	أو ٣ ≠ ٤	الأثقل هى العملة الزائفة

ألغاز وحلول

لغز التفاح:

لو أعطينا كل طفل فى رحلة ثلاث تفاحات فإن الطفل الأخير سوف يأخذ تفاحتين، ولكن لو أعطينا كل طفل تفاحتين يتبقى ٨ تفاحات فما عدد التفاح الكلى؟

لغز القطارات:

بدأ قطاران فى السير الساعة السابعة صباحًا، أحدهما من أ إلى ب والآخر من ب إلى أ ، ويقطع القطار الأول المسافة فى ٨ ساعات ويقطعها الآخر فى ١٢ ساعة ، ففى أى ساعة من ساعات النهار يتقابل القطاران؟

لغز طبق الفاكهة:

دخل ثلاث إخوة مطعمًا وطلبوا غذاء، وعندما انتهى الغذاء لم تقدم لهم الفاكهة فطلبوا من صاحب المطعم تينًا وبينما هم ينتظرون وصول الفاكهة غلبهم النعاس وعندما استيقظ الأول أكل نصيبه من التين ونام، ولما استيقظ الثانى أكل ما اعتقد أنه نصيبه ونام ولما استيقظ الثالث فعل نفس الشيء وتبقي فى الطبق ٨ حبات تين وعندما استيقظ الجميع دارت مناقشة قصيرة فوضحت القصة، وقسمت الثمانى حبات الباقية بين الثانى والثالث ، فكم عدد الحبات التى حصل عليها كل منهم ؟

لغز التاجر المتعجل:

يصل تاجر فى العادة إلى محطة السكة الحديد القريبة من منزله فى الساعة الخامسة مساء، حيث تقابله زوجته فى عربة الأسرة، وفى أحد الأيام وصل من غير توقع إلى المحطة فى الساعة الرابعة مساء وبدلاً من أن ينتظر العربة على المحطة، سار على قدميه نحو المنزل، وبعد فترة من الزمن قابل زوجته وركب العربة كالعادة فبلغ المنزل قبل ميعاده بست عشرة دقيقة فما هى المسافة التى سارها ؟

لغز المكعبات الصغيرة:

ما هو أصغر عدد من القطع تقسم به مكعبًا من الخشب طول ضلعه ٣ بوصات إلى مكعبات طول ضلعها بوصة واحدة ؟

حلول الألغاز

لغز التفاح:

كل ولد سيأخذ تفاحتين ، فنأخذ تفاحة من كل ولد أخذ ثلاث تفاحات وبذلك تجمع ٨ تفاحات وعلى ذلك يكون عدد التفاح يساوى ٨ × ٣ +٢ = ٢٦ تفاحة .

لغز القطارات:

يقطع القطاران على الترتيب $\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{١٢}$ من المسافة أب فى الساعة، وعلى ذلك فهما يتلاقيان بعد $\frac{٢٤}{٥}$ من الساعات أى بعد ٤ ساعات و ٤٨ دقيقة وعلى

ذلك يتلاقى القطاران فى الساعة ٤٨ , ١١ صباحًا .

لغز طبق الفاكهة:

ترك الأول $\frac{٢}{٣}$ عدد الحبات وترك الثانى $\frac{٢}{٣}$ العدد الذى تركه الأول، أى ترك $\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣}$ أى $\frac{٤}{٩}$ من عدد الحبات الكلى، وأخيراً ترك الثالث $\frac{٢}{٣}$ ما تركه الثانى أى $\frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٨}{٢٧}$ من العدد الأصلى، وقد ترك الثالث فى النهاية ٨ حبات أى أن العدد الأصلى ٢٧ حبة أكل منها الأول ٩ حبات والثانى ٦ حبات والثالث ٤ حبات وعلى ذلك تقسم الحبات الـ ٨ إلى ٣ للثانى حتى يكمل نصيبه إلى ٩ حبات و ٥ للثالث حتى يكمل نصيبه إلى ٩ حبات .

لغز التاجر المتعجل:

بدلاً من أن نقلق على الرجل، فإنه أقرب أن نعتبر الزوجة هى محور البحث فهى أيضاً قد وفرت ١٦ دقيقة عن رحلتها العادية، فقد وفرت ٨ دقائق فى كل من الذهاب والإياب وتوقعت الزوجة أن تكون فى المحطة الساعة الخامسة مساء، وعلى ذلك كان اللقاء الساعة ٥٢ , ٤ مساء، ويكون الزوج قد سار على قدميه، ٥٢ دقيقة ولاحظ أن الزوجة سارت فى العربة $\frac{٥٢}{٨} = \frac{١٣}{٢}$ مرة أسرع من رحلة زوجها على الأقدام .

لغز المكعبات الصغيرة:

افترض أن المكعب المعلوم يرتكز على الأرض الأفقية فنقسم السطح العلوى له إلى ٩ مربعات بزوجين من المستقيمات المتوازية، فيقطع المكعب رأسياً من هذين الزوجين، فإننا نقسم المكعب إلى تسعة أعمدة متساوية، ويمكن

تقسيمها إلى ٢٧ مكعباً يقطعها قطعتين أفقيتين. ونكون قد قمنا بالعملية المطلوبة بست قطعات ، فهل يمكن القيام بها بعدد أصغر من القطعات ؟

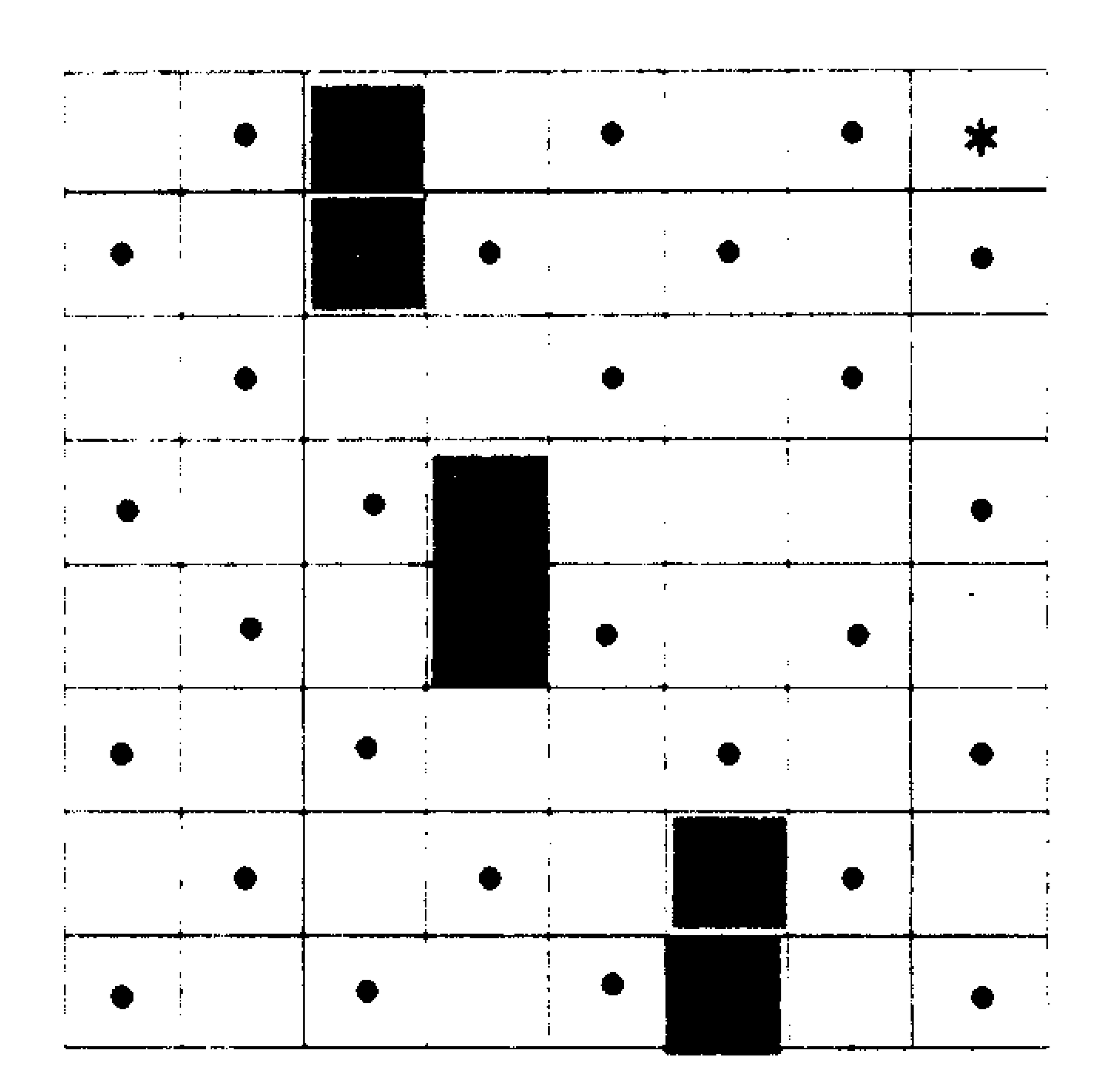
الجواب: لا، ويصبح هذا واضحاً إذا ما اعتبرنا المكعب الصغير الذى يحتل مركز المكعب يحتاج كل من أوجهه الستة إلى عمل قطع منفصل .

❑❑❑

ابحث عن الحل ؟

حديقة الفاكهة:

بدأ مزارع جولتـه فى الحديقة من المربع الذى يحتوى على النـجمة وسار فى طريقه ماراً بـجميع المربعات سـواء التى بها أشجار أو التـى بدون أشجار دون أن يمر بالمربعات التى مر بها ودون أن يسـير فى اتجاه أقطار المربعات ودون المرور بالمربعات الـمظللة والتى تشغل المبانى وفى نهـاية جولته وجد نفـسه فى المربع ذى النجمة مرة أخرى ، فما هو الطريق الذى سلكه المزارع ؟



التفاحات الخمس:

هناك خمس تـفاحات فى السلة. كـيف يمكنك أن تقسـمها بيـن خمس بنات بحيث تحصل كل بنت على تفاحة وتبقى تفاحة فى السلة ؟

العملات المعدنية المتحركة:

ضع ست عمـلات معدنـية على المائدة فى صف واحـد على أن تكون ثلاث منها فضية وثلاث برونزية وترتب العملات بالتبادل واحدة فضية ثم واحدة برونزية

وهكذا، والمطلوب تحريك هذه العملات إلى أن يعاد ترتيبها بحيث تصبح العملات الفضية متجاورة فى جانب والعملات البرونزية متجاورة فى الجانب الآخر من نفس الصف بشرط تحريك كل عملتين متجاورتين معاً بدون تغير ترتيبهما فى الصف إلى مكان خال فى الصف أو بجواره ويشترط أيضاً ألا يزيد عدد الحركات عن ثلاث حركات ، إذا لم تتوفر العملات المعدنية يمكن استخدام قطع من الورق الملون .

عشرة كراسي:

فى غرفة مستطيلة كيف ترتب عشرة كراسٍ بجوار الحوائط بحيث يكون هناك عدد متساو من الكراسى عند كل حائط ؟

الأرقام الزوجية:

خذ ١٦ عملة معدنية ورتبها فى أربعة صفوف يحتوى كل صف على أربع عملات، والمطلوب إبعاد عدد ست عملات بحيث يتبقى فى كل صف وكل عمود عدد زوجى .

الحركات الثلاث:

ضع ثلاث مجموعات من أعواد الثقاب على المنضدة بحيث تحتوى المجموعة الأولى على (١١) عوداً، والثانية على (٧) أعواد والثالثة على (٦) أعواد، والمطلوب نقل أعواد الثقاب من مجموعة إلى أخرى إلى أن تحتوى كل مجموعة على (٨) أعواد، وبشرط أنه يمكنك نقل عدد من أعواد الثقاب من مجموعة إلى أخرى مقداره عدد أعواد ثقاب المجموعة المنقول إليها، على أن

تأتى الأعـواد التى تنقلها مـن مجـموعـة واحدة. مـثال ذلك أنه إذا رغـبت فى نقل أعواد ثقاب إلى مجموعة أخرى تحتوى على ستة (٦) أعواد فيجب أن تنقل إليها ستة (٦) أعـواد لا أكثر ولا أقل ويجب أن تأتى جـميع هذه الأعواد من مجـموعة أخرى واحدة. ويسمح بثلاث حركات فقط .

المثلث السحرى:

ارسم مـثلثاً وضع عـند زواياه الأرقام ١، ٢، ٣ ثم رتب الأرقـام ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ على أضلاع المثلث بحيث يكون مجموع الأرقام على كل ضلع هو (١٧)

الساعة العجيبة:

تلقى صاحب محل لإصـلاح الساعات مكالمة تليفونية تـدعوه للحضور إلى أحد المنازل لاستبدال عقارب مكسورة لساعة حـائط كبيرة، ولمـا كان صاحب المحل مـريضاً فـقد أرسل مسـاعده بدلاً منه ، فقـام المسـاعد بإصلاح العـقارب ولكنه أخطأ فوضع عقـرب الساعات مكان عقرب الدقائق وعـقرب الدقائق مكان عقرب الساعـات ثم قام بضبط ساعة الحائط على ساعتـه وكانت الساعة فى ذلك الوقت السادسة مساءً فوضع العقرب الكبير على الرقم ١٢ والعقرب الصغير على الرقم ٦. ثم عاد المسـاعد إلى المحل، وبعد قليل دق جرس التليـفون فى المحل ليسـمع صوتاً يصـيح بغضب: «إنك لم تصلح السـاعة جيـداً ، إن الساعـة لا تبين الوقت الصحيح ».

فأسرع المسـاعد إلى المنزل مندهشاً، وكانت ساعة الحائط تشـير إلى ما بعد الثامنة بقليل ، وأخرج ساعة جيبـه وقدمها إلى صاحب المنزل قائلاً «انظر بنفسك

إن ساعتك مضبوطة تماماً » وفى صباح اليوم التالى شكا صاحب الساعة من أن الساعة تسير كما يحلو لها ، فأسرع المساعد إلى المنزل وكانت الساعة تشير إلى ما بعد السابعة بقليل ونظر إلى ساعة الجيب فوجدها مضبوطة مع ساعة الحائط ، فكيف حدث ذلك ؟

أربعة خطوط مستقيمة:

رتب تسع نقاط على شكل مربع يحتوى على ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة. والمطلوب رسم أربعة خطوط مستقيمة تمر بجميع النقاط دون رفع القلم عن الورقة .



واحد ـ اثنين ـ ثلاثة ـ مالا نهاية ـ جورج جاموف.

الرياضيات فى حياتنا ... ترجمة د . فاطمة عبد القادر.

الرياضيات للمليون ... سلسلة الألف كتاب.

مجلة العلم .. أعداد كثيرة.

مجلة العلوم .. أعداد كثيرة.

موسوعة المعرفة.

الموسوعة الذهبية.

موسوعة غرائب العالم .

هذا الكتاب

الرياضيات من العلوم التى تمثل تحديًا لكل من درسها، وتشعره بالعجز فى مواجهة معضلات يصعب حلها، ولكن كتابنا هذا يوفر جرعة عبقرية من الرياضيات الجادة والطريفة والمسلية والغريبة، تجعل القارئ فى حالة من المتعة غير العادية، حيث تحمله صفحات الكتاب بعيدًا عن التعقيد المألوف من الرياضيات بصفة عامة لتحلق به فى سماء المتعة العقلية والعبقرية دون قيود معقدة .

والله هو الموفق من قبل ومن بعد .

الناشر

